Ingenieursgrundlagen

$\pi \approx 3.141\,59$ $\quad e \approx 2.718\,28$ $\quad \sqrt{2} \approx 1.414$ $\quad \sqrt{3} \approx 1.732$

$10^{\pm}$	21	18	15	12	9	6	3	2	1
+	Z zetta	E exa	P peta	T tera	G giga	M mega	k kilo	h hecto	da deca
−	z zepto	a atto	f femto	p pico	n nano	µ micro	m milli	c centi	d deci

Dezibel: $L_{\text{dB}} = 10\lg\frac{P}{P_0}\,\text{dB} = 10\lg\frac{A^2}{A_0^2}\,\text{dB} = 20\lg\frac{A}{A_0}\,\text{dB}$

$\text{dB} = 10\lg\frac{x}{x_0}$	-20	-10	0	1	3	6	10	20
Leistung P	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	1.26	2	4	10	100
Amplitude A	$\frac{1}{10}$	0.316	1	1.22	1.4	2	3.16	10

Binome, Trinome

$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $\qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Folgen und Reihen

$\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ Aritmetrische Summenformel $\qquad \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ Geometrische Summenformel $\qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^{z}$ Exponentialreihe

Taylorpolynom: $T(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ (Reihe für $m \to \infty$)

Mittelwerte ($\sum$ von i bis N) $\qquad$ (Median: Mitte einer geordneten Liste)

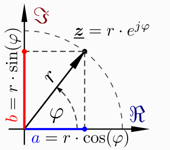
$\overline{x}_{\text{ar}} = \frac{1}{N}\sum x_i$ (Arithmetisches) $\geq$ $\overline{x}_{\text{geo}} = \sqrt[N]{\prod x_i}$ (Geometrisches Mittel) $\geq$ $\overline{x}_{\text{hm}} = \frac{N}{\sum \frac{1}{x_i}}$ (Harmonisches)

Ungleichungen: $\qquad$ Bernoulli-Ungleichung: $(1+x)^n \geq 1 + nx$

$\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ Dreiecksungleichung $\qquad \left|\underline{x}^\top \cdot \underline{y}\right| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|$ Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Mengen: De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \uplus \overline{B}$ $\qquad \overline{A \uplus B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Komplexe Zahlen $a + b\mathrm{i} = z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$



$z = a + b\mathrm{i}$ (Karthesisch) $= r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}$ (Polarkoord.) $\qquad \boxed{\mathrm{i} = \sqrt{-1} \text{ Imaginäre Einheit}}$

$\mathrm{i}^{2n} = -1^n \qquad \mathrm{i}^{2n+1} = -\mathrm{i}^n \qquad \mathrm{i}^{-1} = -\mathrm{i}$

Konjugiert: $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$ $\qquad \overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$

$z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

Inverse $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{a - b\mathrm{i}}{a^2+b^2}$

1. Abbildungen $\underline{f} : \mathbb{D}^n \to \mathbb{W}^m,\ \underline{x} \mapsto \underline{f}(\underline{x})$

Bild $f(D) := \{f(x) \mid x \in D\}$ $\qquad$ **Kern** $\ker f := \{\underline{x} \mid \underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}\}$

Komposition $f \circ g := f\big(g(x)\big)$ $\qquad$ **Fixpunkt** $a := f(a)$

$\left.\begin{array}{ll}\textbf{Injektiv} & f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \textbf{Surjektiv} & \forall y \in \mathbb{W} \exists x \in \mathbb{D} : f(x) = y\end{array}\right\}$ beides: **Bijektiv**

$f'(x_0) \overset{!}{=} 0 \quad \begin{cases} f''(x_0) < 0 \ \to \ \text{Maximum (lokal)} \\ f''(x_0) > 0 \ \to \ \text{Minimum (lokal)}\end{cases}$

$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \to x_0$ Wendepunkt

$f'(x) \underset{(>)}{\geq} / \underset{(<)}{\leq} 0 \ \to \ f$ (streng) Monoton steigend/fallend. $x \in [a, b]$

1.1. Asymptoten und Grenzwerte von f

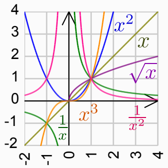
Horizontal: $c_\pm = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ $\qquad$ Vertikal: $\exists$ Nullst. a des Nenners

Regel von L'Hospital: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \to \left[\frac{0}{0}\right] / \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^n} = 0 \qquad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!} = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot e^{-x} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)} = 1$

1.2. Polynome $P(x) \in \mathbb{R}[x]_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ vom Grad n



Gerade durch Punkt $P(x_0, y_0)$: $y = m(x - x_0) + y_0$

Quadratisch: $y = ax^2 + bx + c$

NST: $\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

1.3. Partialbruchzerlegung $\frac{Z(x)}{N(x)} \overset{!}{=} P(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(x-x_i)^{r_i}}$

$N(x)$ hat n verschiedene Nullstellen, die jeweils r_i-fach vorkommen.

1. Ansatz: $N^*(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{r_i} \frac{A_{ik}}{(x-x_i)^k}$
2. Koeffizientenvergleich: löse $Z(x) = N^*(x) \cdot N(x)$ nach A_{ik}

1.4. Exp. und Log. $e^x := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ $\qquad e \approx 2{,}71828$

$a^x = e^{x \ln a}$ $\qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\qquad \ln x \leq x - 1$

$\ln(x^a) = a\ln(x)$ $\qquad \ln(\frac{x}{a}) = \ln x - \ln a$ $\qquad \log(1) = 0$

1.5. Kurven $\underline{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \underline{\gamma}(t)$

Bogenlänge: $L(\underline{\gamma}) = \int\limits_a^b \left\|\dot{\underline{\gamma}}(t)\right\| \mathrm{d}t$ $\qquad$ **Krümmung:** $\kappa(t) = \left\|\frac{\mathrm{d}^2\underline{\gamma}}{\mathrm{d}s^2}\right\| = \frac{\left\|\dot{T}(t)\right\|}{s'(t)}$

$s : [a, b] \to [0, L(\underline{\gamma})], t \mapsto s(t)$ (nach Bogenlänge parametr.)

$\mathcal{C}^n$-Kurve: n-mal stetig diffbar, $\mathcal{C}^0$-Kurve: geschlossene Kurve

regulär, falls $\forall t \in [a, b] : \dot{\gamma}(t) \neq \underline{0}$ (Keine Knicke), sonst singulär

1.6. Skalarfelder $\varphi : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Richtungsableitung: $\partial_v f(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x})^\top \cdot \underline{v}$ mit $\|\underline{v}\| = 1$

2. Trigonometrie $e^{\alpha + \mathrm{i}\beta} = e^{\alpha}\left(\cos(\beta) + \mathrm{i}\sin(\beta)\right)$

2.1. Sinus, Cosinus $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(-x) = -\sin(x)$ $\qquad \cos(-x) = \cos(x)$

x / φ	0 / $0°$	$\pi/6$ / $30°$	$\pi/4$ / $45°$	$\pi/3$ / $60°$	$\frac{1}{2}\pi$ / $90°$	π / $180°$	$1\frac{1}{2}\pi$ / $270°$	2π / $360°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0

Additionstheoreme

$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$

$\sin(x \pm y) = \sin x\ \cos y \pm \sin y\ \cos x$

$\cos(x \pm y) = \cos x\ \cos y \mp \sin x\ \sin y$

Stammfunktionen

$\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x) + x\sin(x)$

$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) - x\cos(x)$

$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \sin(x)\cos(x)\right)$

$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \sin(x)\cos(x)\right)$

$\int \cos(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$

$\sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x})$

$\cos x = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x})$

2.2. Sinus/Cosinus Hyperbolicus $\sinh, \cosh$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}x)$ $\qquad \cosh x + \sinh x = e^x$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(\mathrm{i}x)$ $\qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Kardinalsinus $\operatorname{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ $\qquad$ genormt: $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

3. Lineare Algebra

3.1. Vektorräume $(V, +, \cdot)$ über Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, $\underline{v} \in \mathbb{K}^n$

Linear Unabhängig: Vektoren heißen linear unabhängig, wenn aus: $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}$ folgt, dass alle $\alpha_i = 0$

Basis $\boldsymbol{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots\}$: n Vektoren, linear unabhängig, erzeugen V

Betrag (Norm): $\|\underline{a}\| = \sqrt{\langle\underline{a}, \underline{a}\rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$

Skalarprodukt: $\langle\underline{v}, \underline{w}\rangle = \underline{v}^\top \cdot \underline{w} = \sum v_i w_i = \|\underline{a}\|\,\|\underline{b}\|\cos(\measuredangle\underline{a}, \underline{b})$

$\langle\underline{v}, \underline{w}\rangle_{\boldsymbol{A}} = \underline{v}^\top \boldsymbol{A}\underline{w}$ $\qquad$ (quadr., symm., pos. definite Matrix $\boldsymbol{A}$)

Kreuzprodukt(falls $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^3$): $\underline{v} \times \underline{w} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix}$

$\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}, \underline{b}$ $\qquad \underline{a} \times \underline{b} = 0 \ \Leftrightarrow \ \underline{a}; \underline{b}$ linear abhängig.

$||\underline{a} \times \underline{b}|| = ||\underline{a}|| \cdot ||\underline{b}|| \cdot \sin\left(\measuredangle(\underline{a}; \underline{b})\right) \mathrel{\widehat{=}}$ Fläche des Parallelogramms

Graßmann-Identität: $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) \equiv \underline{b} \cdot (\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c} \cdot (\underline{a} \cdot \underline{b})$

Spatprodukt: $[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] := \langle\underline{a} \times \underline{b}, \underline{c}\rangle = \det(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \mathrel{\widehat{=}}$ Spatvolumen

$[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] > 0 \ \Rightarrow$ Rechtssystem $\qquad [\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = 0 \ \Rightarrow$ Vekt. lin. abhängig

3.2. Matrizen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat m Zeilen (Index i) und n Spalten (Index j)

$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}^\top$ $\qquad (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{B}^\top \cdot \boldsymbol{A}^\top$

$(\boldsymbol{A}^\top)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^\top$ $\qquad (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

$\dim \mathbb{K} = n = \operatorname{rang}\boldsymbol{A} + \dim\ker\boldsymbol{A}$ $\qquad \operatorname{rang}\boldsymbol{A} = \operatorname{rang}\boldsymbol{A}^\top$

3.2.1 Quadratische Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

regulär/invertierbar/nicht-singulär $\Leftrightarrow \det(\boldsymbol{A}) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang}\boldsymbol{A} = n$

singulär/nicht-invertierbar $\Leftrightarrow \det(\boldsymbol{A}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang}\boldsymbol{A} \neq n$

orthogonal $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A}^{-1} \Rightarrow \det(\boldsymbol{A}) = \pm 1$

symmetrisch: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\top$ $\qquad$ schiefsymmetrisch: $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^\top$

3.2.2 Determinante von $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$: $\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}|$

$\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix} = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{D})$

$\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^T)$ $\qquad \det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \det(\boldsymbol{A})^{-1}$

$\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{B})\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$

Hat $\boldsymbol{A}$ 2 linear abhäng. Zeilen/Spalten $\Rightarrow |\boldsymbol{A}| = 0$

3.2.3 Eigenwerte (EW) λ und Eigenvektoren (EV) $\underline{v}$

$$\boxed{\boldsymbol{A}\underline{v} = \lambda\underline{v} \qquad \det\boldsymbol{A} = \prod \lambda_i \qquad \operatorname{Sp}\boldsymbol{A} = \sum a_{ii} = \sum \lambda_i}$$

Eigenwerte: $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\underline{1}) = 0$ Eigenvektoren: $\ker(\boldsymbol{A} - \lambda_i\underline{1}) = \underline{v}_i$

EW von Dreieck/Diagonal Matrizen sind die Elem. der Hauptdiagonale.

3.2.4 Spezialfall 2×2 Matrix A

$\det(\boldsymbol{A}) = ad - bc$ $\qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}$

$\operatorname{Sp}(\boldsymbol{A}) = a + d$

$\lambda_{1/2} = \frac{\operatorname{Sp}\boldsymbol{A}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sp}\boldsymbol{A}}{2}\right)^2 - \det\boldsymbol{A}}$

3.2.5 Differentiation

$\frac{\partial\underline{x}^\top\underline{y}}{\partial\underline{x}} = \frac{\partial\underline{y}^\top\underline{x}}{\partial\underline{x}} = \underline{y}$ $\qquad \frac{\partial\underline{x}^\top\boldsymbol{A}\underline{x}}{\partial\underline{x}} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top)\underline{x}$

$\frac{\partial\underline{x}^\top\boldsymbol{A}\underline{y}}{\partial\boldsymbol{A}} = \underline{x}\underline{y}^\top$ $\qquad \frac{\partial\det(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})}{\partial\boldsymbol{A}} = \det(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^\top$

3.2.6 Vektornormen: ($\underline{x} \in \mathbb{K}^n$, $\sum$ von $i = 1$ bis n)

Summen $\|\underline{x}\|_1 = \sum|x_i|$ $\qquad$ Euklidische $\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\sum|x_i|^2}$

Maximum $\|\underline{x}\|_\infty = \max|x_i|$ $\qquad$ Alg. p-Norm $\|\underline{x}\|_p = \left(\sum|x_i|^p\right)^{1/p}$

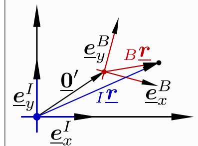
3.2.7 Matrixnormen ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}, i \in [1, m], j \in [1, n]$)

$\|\boldsymbol{A}\|_G = \sqrt{mn} \cdot \max\limits_{i,j}|a_{ij}|$ $\qquad \|\boldsymbol{A}\|_M = \frac{\|\boldsymbol{A}\|_G}{\sqrt{mn}}$

$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{m}|a_{ij}|$ $\qquad \|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

$\|\boldsymbol{A}\|_{\text{Eukl.}} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}\sum\limits_{j=1}|a_{ij}|^2}$ (Frobenius) $\qquad \|\boldsymbol{A}\|_\lambda = \sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^\top \cdot \boldsymbol{A})}$ (Spektralnorm,/Hilbertnorm)

3.3. Koordinatensysteme $\quad -\pi < \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$



Vektor $\underline{r}$ zur Basis B: $\quad {}_B\underline{r} = r_x\underline{e}_x^B + r_y\underline{e}_y^B + r_z\underline{e}_z^B$

$\underline{e}_i^B$	Basisvektor von B in i-Richtung
r_i	Koordinate in i-Richtung
$r_i\underline{e}_i^B$	i-Komponente bezüglich B
I	Basis des Inertialsystems I

Um einen karthesischen Vektor mit anderen Koordinaten darzustellen:

Zylinderkoordinaten: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \\ z\end{pmatrix}$ $\qquad$ **Kugelkoordinaten:** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cdot\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cdot\cos(\theta)\end{pmatrix}$

Basistrafo $A \to B$: Spalten von ${}_B\boldsymbol{T}_A$ entsprechen Basisvekt. von A in B dargestellt: $\boxed{{}_B\underline{v} = {}_B\boldsymbol{T}_A \cdot {}_A\underline{v}}$

3.4. Ableitungsregeln ($\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

Linearität: $\quad (\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x_0)$

Produkt: $\quad (f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Quotient: $\quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ $\quad \left(\frac{\text{NAZ}-\text{ZAN}}{\text{N}^2}\right)$

Kettenregel $\quad \left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)$

3.5. Integrale $\int e^x \mathrm{d}x = e^x = (e^x)'$

Partielle Integration: $\quad \int uw' = uw - \int u'w$

Substitution: $\quad \int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t$

$F(x) - C$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x\ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{a^2}e^{ax}(ax - 1)$	$x \cdot e^{ax}$	$e^{ax}(ax + 1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x\ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

$\int e^{at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t = e^{at}\frac{a\sin(bt) + b\cos(bt)}{a^2+b^2}$

$\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{at+b}} = \frac{2\sqrt{at+b}}{a}$ $\qquad \int t^2e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{(ax-1)^2+1}{a^3}e^{at}$

$\int te^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{at-1}{a^2}e^{at}$ $\qquad \int xe^{ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}e^{ax^2}$

3.5.1 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern um x-Achse

$V = \pi\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x$ $\qquad O = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$

3.6. Differentialoperatoren $\quad \operatorname{div}(\operatorname{rot}\underline{f}) \equiv 0$

Gradient $\operatorname{grad} f$ $\quad \nabla f = \begin{pmatrix}\partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f\end{pmatrix}$

Rotation $\operatorname{rot}\underline{f}$ $\quad \nabla \times \underline{f} = \begin{pmatrix}\partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1\end{pmatrix}$

Divergenz $\operatorname{div}\underline{f}$ $\quad \nabla^\top \cdot \underline{f} = \sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$

Laplace $\Delta f = \operatorname{Sp}\boldsymbol{H}_f(\underline{x})$ $\quad \underset{\nabla^\top\cdot(\nabla f)}{\nabla^2 f} = \sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i x_i}$

$\iiint\limits_V \operatorname{div}\underline{v}\,\mathrm{d}V = \oiint\limits_{\partial V}\underline{v}\cdot\mathrm{d}A$ (Integralsatz Gauß) $\qquad \iint\limits_A \operatorname{rot}\underline{v}\,\mathrm{d}A = \oint\limits_{\partial A}\underline{v}\,\mathrm{d}\underline{s}$ (Integralsatz Stokes)

Jacobimat. $\boldsymbol{J}_{\underline{f}}(\underline{x}) = \begin{bmatrix}\partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \cdots & \partial_n f_m\end{bmatrix}$ $\qquad$ Hessematrix $\boldsymbol{H}_f(\underline{x}) =$ (sym $\Leftrightarrow f \in \mathcal{C}^2$) $\begin{bmatrix}\partial_{11} f & \cdots & \partial_{1n} f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n1} f & \cdots & \partial_{nn} f\end{bmatrix}$

von Emanuel Regnath – Mail: emanuel.regnath@tum.de

4. Frequenzanalyse

4.1. Fourier-/Laplacetrafo $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)$

Fourier $s = \mathrm{i}\omega$ | Laplace $s = \alpha + \mathrm{i}\omega$

$F(s) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-st)\,\mathrm{d}t$ | $F(s) := \int_{0}^{\infty} f(t)\exp(-st)\,\mathrm{d}t$

$\alpha f(t) + \beta g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \alpha F(s) + \beta G(s)$ | $f(ct) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{|c|} F(\frac{s}{c})$

$f(t-\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-s\tau} F(s)$ | $e^{\tau t} \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s-\tau)$

$\int_{-\infty}^{t} \tau\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{s} F(s)$ | $f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, s^n F(s)$

$(f * g)(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s) \cdot G(s)$

5. Stochastik

Kombinatorik: Mögliche Variationen/Kombinationen um k von maximal n Elemente zu wählen bzw. k Elemente auf n Felder zu verteilen:

	Mit Reihenfolge	Reihenfolge egal
Mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Permutation von n mit jeweils k gleichen Elementen: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots}$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{5}{2} = 10 \quad \binom{6}{2} = 15$

5.1. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathrm{P})$

Ergebnismenge	$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$	Ergebnis $\omega_j \in \Omega$	
Ereignisalgebra	$\mathbb{F} = \{A_1, A_2, \ldots\}$	Ereignis $A_i \subseteq \Omega$	
Wahrscheinlichkeitsmaß	$\mathrm{P} : \mathbb{F} \to [0,1]$	$\mathrm{P}(A) = \frac{\|A\|}{\|\Omega\|}$	

Es gilt: $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit für A falls B bereits eingetreten ist:
$\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

Multiplikationssatz: $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)$

Erwartungswert: $\mathrm{E}[X] = \mu = \sum x_i P(x_i) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$

Varianz: $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$

Standard Abweichung $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$

Covarianz: $\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])] = \mathrm{Cov}[Y,X]$

Binomialverteilung $\mathcal{B}(n,p,k)$ (diskret, n Versuche, k Treffer):
$\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \mu = np \quad \sigma^2 = np(1-p)$

Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

5.2. Hypothesen / Klassifizierung

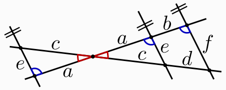
Nullhypothese H_0 wird (zur Sicherheit) zu erst als wahr angenommen.
Alternativhypothese H_1 soll überprüft/gezeigt werden.

Decision \ Reality	H_1 false (H_0 true)	H_1 true (H_0 false)
H_1 rejected (H_0 accepted)	True Negative $\mathrm{P} = 1 - \alpha$	False Negative (Type 2) $\mathrm{P} = \beta$
H_1 accepted (H_0 rejected)	False Positive (Type 1) $\mathrm{P} = \alpha$	True Positive $\mathrm{P} = 1 - \beta$

Sensitivity: (Hit Rate) $\frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{TP+FN}} = 1 - \beta$ | Specificity: $\frac{\mathrm{TN}}{\mathrm{FP+TN}} = 1 - \alpha$

Precision: $\frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{TP+FP}}$ | Accuracy: $\frac{\mathrm{TP+TN}}{\mathrm{P+N}} = \frac{2-\alpha-\beta}{2}$

6. Geometrie



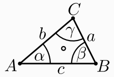
Strahlensatz:

$a : b = c : d \quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}$

Innenwinkelsumme im n-Eck: $(n-2) \cdot 180°$

Allg. Dreieck $\triangle ABC$ mit Seiten a, b, c und Winkel α, β, γ:



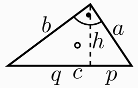
Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Projektionssatz: $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$

Höhe $h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha$ | Fläche $A = \frac{1}{2}h_c c = \frac{1}{2}h_a a$

Rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit $\gamma = 90°$ bei C

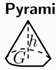


Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

$\underbrace{h^2 = pq}_{\text{Höhensatz}} \quad \underbrace{a^2 = pc}_{\text{Kathetensatz}}$

$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\tan\alpha$

Pyramide mit beliebiger Grundfläche G



$V = \frac{1}{3} G \cdot h$
SP: liegt auf h mit $y_S = h/4$

Zylinder/Prisma
$V = G \cdot h$
$M = U \cdot h$

$\boxed{\textbf{Kreis: } A = \pi r^2, \;\; U = 2\pi r \qquad \textbf{Kugel: } V = \frac{4}{3}\pi r^3, \;\; O = 4\pi r^2}$

7. Physik

Lichtgeschwindigkeit	$c_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} := 299\,792\,458\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Elementarladung	$\mathrm{e} \approx 1.602\,177 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
PLANCK-Konst.	$h \approx 6.626\,069\,57 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$
	$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \approx 1.054\,57 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$
Elektr. Feldkonst.	$\varepsilon_0 = 8.854\,188 \times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
Magn. Feldkonst.	$\mu_0 := 4\pi \times 10^{-7}\ \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$
AVOGADRO-Konst.	$N_\mathrm{A} \approx 6.022\,141 \times 10^{23}\ \frac{1}{\mathrm{mol}}$
Atomare Masse	$\mathrm{u} \approx 1.660\,539 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Elektronenmasse	$m_e \approx 9.109\,383 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Protonenmasse	$m_p \approx 1.674\,927 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Neutronenmasse	$m_n \approx 1.672\,622 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Gravitationskonst.	$\mathrm{G} \approx 6.673\,84 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$
BOLTZMANN-Konst.	$k_\mathrm{B} \approx 1.380\,655 \times 10^{-23}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

Größe	Definition	Einheit	SI-Notation
Frequenz	$f = \frac{c}{\lambda}$	Hertz	$\mathrm{Hz} = \frac{1}{\mathrm{s}}$
Kraft	$\boldsymbol{F} := m \cdot \boldsymbol{a}$	Newton	$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$
Druck	$p := \frac{\boldsymbol{F}_\perp}{A}$	Pascal	$\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}^2}$
Arbeit, Energie	$W := \int \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$	Joule	$\mathrm{J} = \mathrm{N\,m} = \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^2}$
Leistung	$P := \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$	Watt	$\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{s}^3}$
Spannung	$U := \frac{W}{Q}$	Volt	$\mathrm{V} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{A\,s}^3}$
Ladung	$Q := \int I\,\mathrm{d}t$	Coulomb	$\mathrm{C} = \mathrm{A\,s}$
Resistivität	$R := \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I}$	Ohm	$\Omega = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{A}^2\,\mathrm{s}^3}$
Kapazität	$C := \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}U}$	Farad	$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{A}^2\,\mathrm{s}^4}{\mathrm{kg\,m}^2}$
Induktivität	$L := \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}I}$	Henry	$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{A}^2\,\mathrm{s}^2}$
Magnetischer Fluss	$\Phi_\mathrm{M} := \int \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A}$	Weber	$\mathrm{Wb} = \mathrm{V\,s} = \frac{\mathrm{kg\,m}^2}{\mathrm{A\,s}^2}$
Magnetische Flussdichte	$\boldsymbol{B} := \mu_0 \boldsymbol{H}$	Tesla	$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A\,s}^2}$

$1\,\mathrm{in} = 2.54\,\mathrm{cm} \qquad 1\,\mathrm{ft} = 30.5\,\mathrm{cm} \qquad \mathrm{J} \cdot e = \mathrm{eV}$

$1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa} \qquad 1\,\mathrm{Å} = 10^{-10}\,\mathrm{m} \qquad 1\,\mathrm{L} = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$

Mechanik	Translation	Rotation (Radius r)
Strecke/Winkel	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{\varphi} = \frac{\boldsymbol{x}}{r}$
Geschwindigkeit	$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\boldsymbol{v}}{r}$
Beschleunigung	$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\boldsymbol{a}}{r}$
Masse/Trägh.	m	$\Theta = \int_V \boldsymbol{r}_\perp^2\,\mathrm{d}m$
Impuls/Drall	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$
Kraft/Moment	$\boldsymbol{F} = \dot{\boldsymbol{p}} = m\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{M} = \dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
Energie	$E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_\mathrm{rot} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$
Leistung	$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$	$P = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$

$v = v_0 + at \qquad \omega = \omega_0 + \alpha t$

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \qquad \varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$

$2ax = v^2 - v_0^2 \qquad 2\alpha\varphi = \omega^2 - \omega_0^2$

$F_\mathrm{g} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \approx \boldsymbol{g}m \qquad F_\mathrm{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}$

$F_\mathrm{z} = -m\frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r \qquad F_\mathrm{R} = \mu F_\mathrm{N} \qquad F_\mathrm{H} \le \mu_0 F_\mathrm{N}$

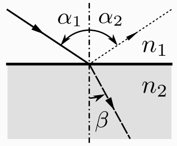
Energie: $E = \int \boldsymbol{F}^\top \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \qquad E_\mathrm{pot} = mgh = \frac{1}{2}kx^2$

7.1. Wellen $\Psi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - \boldsymbol{k}^\top \boldsymbol{x})$ (rechts laufend)

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i^2} = 0 \qquad c = \lambda f \quad \omega = 2\pi f \qquad \|\boldsymbol{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}$

Quantenphys: $E_\mathrm{ph} = f \cdot h = \hbar \cdot \omega = \frac{hc}{\lambda} \qquad \left\|\boldsymbol{p}\right\| = \frac{h}{\lambda} = \hbar\,\|\boldsymbol{k}\|$

7.2. Optik $n_1 < n_2 \qquad n^2 = \varepsilon_r \mu_r$



Reflexion: $\underbrace{\alpha_1}_{\text{Einfallwinkel}} = \underbrace{-\alpha_2}_{\text{Ausfallwinkel}}$

Brechung: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

Brewster-Winkel: $\tan(\alpha_B) = \frac{n_2}{n_1}$

Grenzwinkel: $\sin(\alpha_G) = \frac{n_2}{n_1}$

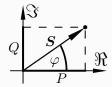
Phasensprung um π bei (Total-)Reflexion am optisch dichteren Medium!

Relativitätstheorie $E = mc^2$

$\gamma = 1\Big/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad E = mc^2 \quad E_0^2 = E^2 - c^2 p^2 \qquad m^* = \gamma \cdot m_0 \quad t_0 = \gamma \cdot t^*$

7.3. Elektrotechnik $U = R \cdot I \qquad P = U \cdot I$

Wirkleistung $P = UI \cdot \cos(\Delta\varphi)$ [W]
Blindleistung $Q = UI \cdot \sin(\Delta\varphi)$ [Var]
Scheinleistung $\boldsymbol{S} = P + \mathrm{i}Q = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{I}^*$ [VA]



Serienschalt: $R = \sum R_i \quad \frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} \quad L = \sum L_i$

Parallelschalt: $\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i} \quad \frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} \quad \frac{1}{L} = \sum \frac{1}{L_i}$

7.4. Thermodynamik $0\,°\mathrm{C} = 273.15\,\mathrm{K}$

$\boxed{\underbrace{\mathrm{d}U}_{\text{innere Energie}} = \underbrace{\delta Q}_{\text{Wärmeenergie}} + \underbrace{\delta W}_{\text{Volumenarbeit}} = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V}$

$\Delta U = U_2 - U_1 = Q_{1,2} + W_{1,2}$

Wärme $Q = C \cdot \Delta T = \int T\,\mathrm{d}S \qquad W_{1,2} = -\int_1^2 p\,\mathrm{d}V$

Wärmekapazität: $C = c \cdot m = c_\mathrm{m} \cdot n$

Thermische Energie eines Teilchens mit f Freiheitsgraden:

$\boxed{E_\mathrm{therm} = \frac{f}{2}k_\mathrm{B}T}$ Thermische Rauschenergie bei 300K: $\Delta E_\mathrm{therm} = kT = 25.85\,\mathrm{meV}$

Jede Wärmekraftmaschine: $\eta < \eta_\mathrm{Carnot} = 1 - \frac{T_\mathrm{kalt}}{T_\mathrm{heiß}}$

Zustandsgleichung ideales Gas: $\boxed{pV = nT \cdot N_\mathrm{A} k_\mathrm{B}}$

7.5. Chemie

Masse $m = n_\mathrm{mol} \cdot m_\mathrm{M} = V \cdot \rho = m_x \cdot N$ | Teilchenzahl N

Stoffmenge $n_\mathrm{mol} = \frac{N}{N_\mathrm{A}} = \frac{m}{m_\mathrm{M}} = \frac{V}{V_\mathrm{M}}$ | Molare Masse m_M

Molares Volumen V_M, bei Gasen: $V_\mathrm{M} \approx 22.4\,\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{mol}}$

Luft: $25\,°\mathrm{C}: \rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}, p = 1013\,\mathrm{hPa}$

Luftdruck/Temperatur sinkt mit $0.125\,\frac{\mathrm{hPa}}{\mathrm{m}}$ / $0.01\,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{m}}$ Höhe

Wasser: $25\,°\mathrm{C}: \rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ Druck steigt mit $0.1\,\frac{\mathrm{bar}}{\mathrm{m}}$ Tiefe

Zerfallsgesetz: $N(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda t) \qquad T_{1/2} \cdot \lambda = \ln(2)$

α–Zerfall $\;{}^{m}_{n}\mathrm{X}^0 \longrightarrow {}^{m-4}_{n-2}\mathrm{Y}^{2-} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+}$

$\beta^\mp$–Zerfall $\;{}^{m}_{n}\mathrm{X}^0 \longrightarrow {}^{m}_{n\pm1}\mathrm{Y}^{\pm} + {}^{0}_{\mp1}\mathrm{e}^{\mp} + {}^{0}_{0}\overline{\nu}_\mathrm{e}$

γ–Zerfall $\;{}^{m}_{n}\mathrm{X}^* \longrightarrow {}^{m}_{n}\mathrm{X} + {}^{0}_{0}\gamma$

Relative Atommasse — 200,59; Ordnungszahl — 80; Hg — **Elementsymbol**; Quecksilber — Elementname

n																		
1	1,00794 1 H Wasserstof																	4,00260 2 He Helium
2	6,941 3 Li Lithium	9,01218 4 Be Berylium											10,811 5 B Bor	12,0107 6 C Kohlenstof	14,0067 7 N Stickstof	15,9994 8 O Sauerstof	18,9984 9 F Fluor	20,180 10 Ne Neon
3	22,9898 11 Na Natrium	24,305 12 Mg Magnesium											26,9815 13 Al Aluminium	28,0855 14 Si Silicium	30,9738 15 P Phosphor	32,065 16 S Schwefel	35,453 17 Cl Chlor	39,948 18 Ar Argon
4	39,0983 19 K Kalium	40,078 20 Ca Calcium	44,9551 21 Sc Scandium	47,867 22 Ti Titan	50,9415 23 V Vanadium	51,9961 24 Cr Chrom	54,9380 25 Mn Mangan	55,845 26 Fe Eisen	58,9332 27 Co Cobalt	58,6934 28 Ni Nickel	63,546 29 Cu Kupfer	65,409 30 Zn Zink	69,723 31 Ga Gallium	72,61 32 Ge Germanium	74,92163 3 As Arsen	78,96 34 Se Selen	79,904 35 Br Brom	83,798 30 Kr Krypton
5	85,4678 37 Rb Rubidium	87,62 38 Sr Strontium	88,9059 39 Y Yttrium	91,224 40 Zr Zirkonium	92,9064 41 Nb Niob	95,94 42 Mo Molybdän	98 4,2Ma 43 Tc β⁻ Technetium	101,07 44 Ru Ruthenium	102,906 45 Rh Rhodium	106,42 46 Pd Palladium	107,868 47 Ag Silber	112,411 48 Cd Cadmium	114,818 49 In Indium	118,710 50 Sn Zinn	121,750 51 Sb Antimon	127,60 52 Te Tellur	126,904 53 I Iod	131,293 54 Xe Xenon
6	132,905 55 Cs Caesium	137,327 56 Ba Barium	=> La-Lu Lanthanoide	178,49 72 Hf Hafnium	180,948 73 Ta Tantal	183,84 74 W Wolfram	186,207 75 Re Rhenium	190,23 76 Os Osmium	192,217 77 Ir Iridium	195,084 78 Pt Platin	196,967 79 Au Gold	200,59 80 Hg Quecksilber	204,383 81 Ti Titan	207,2 82 Pb Blei	208,980 83 Bi Bismut	209,98 84 Po Polonium	209,987 85 At Astat	222 3,8d 86 Rn α Radon
7	223 22m 87 Fr α Francium	226 1,6ka 88 Ra α Radium	=> Ac-Lr Actinoide	253–262 104 Rf Rutherford	261–263 105 Db Dubium	265–266 106 Sg Seaborg	261–264 107 Bh Bohrium	269 10s 108 Hs Hassium	268 109 Mt Meitnerium	271 110 Dt Darmstadt	272 111 Rg Roentgen	277 112 Cn Copernic		289 114 Fl Flerovium		293 116 Lv Livermorium		
	s1	s2	d1	d2	d3	d4	d5	d6	d7	d8	d9	d10	p1	p2	p3	p4	p5	p6

138,906 57 La Lanthan	140,116 58 Ce Cer	140,908 59 Pr Praseodym	144,24 60 Nd Neodym	145 61 Pm Promethium	150,36 62 Sm Samarium	151,964 63 Eu Europium	157,25 64 Gd Gadolinium	158,925 65 Tb Terbium	162,50 66 Dy Dysprosium	164,930 67 Ho Holmium	167,26 68 Er Erbium	168,934 69 Tm Thulium	173,04 70 Yb Ytterbium	174,967 71 Lu Lutetium
227 89 Ac Actinium	232 90 Th Thorium	231 91 Pa Protactinium	238 92 U Uran	237 93 Np Neptunium	244 94 Pu Plutonium	243 95 Am Americium	247 96 Cm Curium	247 97 Bk Berkelium	251 98 Cf Californium	252 99 Es Einsteinium	257 100 Fm Fermium	258 101 Md Mendelevium	259 102 No Nobelium	262 103 Lr Lawrencium
f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	d1