Analysis I - Für Mathematiker

1. Allgemeine Formeln/Ungleichungen

1.1. Abschätzungen

- **Dreiecksungleichung:** $|x+y| \leq |x| + |y|$
  $||x| - |y|| \leq |x - y|$
- **Bernoulli-Ungleichung:** $(1+a)^n \geq 1 + na$
- **Bernoulli für e** $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geq 1 + x$
- **Nützliche Ungleichung:** $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ mit gleicheit für $x = y$
- **Für** $x > y$ **und** $n > 2: 0 < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} < \sqrt[n]{x-y}$

1.2. Allgemeine Formeln

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung

- **Injektivität:** $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- **Surjektivität:** $\forall y \in Y \, \exists x \in X : f(x) = y$
- **Betrag von** $z \in \mathbb{C}$: $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$
- **Binomialkoeffizient:** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- **Binomialsatz:** $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
- **Mitternachtsformel:** $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2. Zahlenfolgen

2.1. Konvergenz

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert a
$\forall \mathcal{E} > 0 \, \exists N \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow |a_n - a| < \mathcal{E}$

2.2. Monotoniesatz

Jede beschränkte und monotone Folge ist konvergent

2.3. Einschließungskriterium

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$, und eine dritte reelle Folge (c_n) erfülle $(a_n) \leq (c_n) \leq (b_n)$ für fast alle n. Dann konvergiert auch c_n gegen a.

2.4. Bestimmte Divergenz

a_n ist bestimmt divergent gegen $+\infty$ falls gilt:
$\forall M > 0 \, \exists N \in \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow a_n > M$
Für $a_n \in \mathbb{C}$ muss $|a_n| \to +\infty$ gelten

2.5. Cauchy-Folge

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge
$\forall \mathcal{E} > 0 \, \exists N \in \mathbb{R} \, \forall m, n \in \mathbb{N} : m, n > N \Rightarrow |a_m - a_n| < \mathcal{E}$

2.6. Bekannte Grenzwerte

Für jedes $\beta > 0$ gilt:

$$\lim_{x \to \infty} (x^\beta e^{-x}) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{ln(x)}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \to 0+} (x^\beta ln(x)) = 0$$

3. Reihen

3.1. Geometrische Reihe

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q| < 1$ und divergiert andernfalls. Es gilt:
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

3.2. Quotientenkriterium

Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und existiere $q := \lim\limits_{k \to \infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}|$ dann gilt:
- für $q < 1$ ist die Reihe absolut konvergent
- für $q > 1$ ist die Reihe divergent

3.3. Wurzelkriterium

Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und existiere $q := \limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ dann gilt:
- für $q < 1$ ist die Reihe absolut konvergent
- für $q > 1$ ist die Reihe divergent

3.4. Leibnizkriterium

Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge.

Die Reihe $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ konvergiert.

Es gilt: $|s - \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k| \leq a_{n+1}$

3.5. Majoranten/Minorantenkriterium

Sei $\sum a_k$ und $\sum b_k$ zwei Reihen.

1. Gilt $0 \leq |a_k| \leq b_k$ für fast alle k, und ist die Majorante $\sum b_k$ konvergent, so konvergiert $\sum a_k$ absolut.

2. Gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ für fast alle k, und ist die Minorante $\sum a_k$ divergent, so divergiert $\sum b_k$

3.6. Integralvergleichskriterium

Sei $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$ konvergiert.

4. Potenzreihen

4.1. Definition

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, z \in \mathbb{C}, \rho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ der Konvergenzradius und z_0 ein Entwicklungspunkt.

Die Potenzreihe $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ konvergiert absolut für $|z| \leq \rho$.

4.2. Konvergenradius

Man betrachte die Koeffizienten Folge (a_k).

- $\rho := \frac{1}{\limsup\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$ mit „$\frac{1}{0} = +\infty$" und „$\frac{1}{\infty} = 0$"
- $\rho := \frac{1}{\lim\limits_{k \to \infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}|}$ mit „$\frac{1}{0} = \infty$"

4.3. Cauchy-Produkt

Seien $(a_k), (b_l)$ Folgen, das Cauchy-Produkt $c = a * b$ ist die neue Folge $c_m = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}$

Konvergieren die Reihen von α, β absolut, konvergiert auch $\sum_m^\infty (\alpha * \beta)$ absolut und es gilt:
$\sum\limits_{m=0}^{\infty} (\alpha * \beta)_m = (\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k)(\sum\limits_{l=0}^{\infty} \beta_l)$

4.4. Exponentialfunktion

$exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$exp(z) = e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$
$e^{z+w} = e^z e^w$
Umkehrfunktion: $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$

4.5. Sinus und Cosinus

- $sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- $cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$
- **Eulersche Formel:** $e^{iz} = cos(z) + i\, sin(z)$
- **trigonometrischer Pythagoras:** $sin^2(z) + cos^2(z) = 1$
- **Paritäten:** $sin(-z) = -sin(z)$ und $cos(-z) = cos(z)$
- **Additionstheoreme:**

$$sin(z+w) = sin(z)cos(w) + cos(z)sin(w)$$
$$cos(z+w) = cos(z)cos(w) - sin(z)sin(w)$$

- **Ableitungen:** $sin'(x) = cos(x), cos'(x) = -sin(x)$

4.6. Sinus und Cosinus Hyperbolicus

- $sinh(z) := -i\, sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
- $cosh(z) := cos(iz) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
- **hyperbolischer Pythagoras:** $cosh^2(z) - sinh^2(z) = 1$
- **Paritäten:** $sinh(-z) = -sinh(z)$ und $cosh(-z) = cosh(z)$
- **Additionstheoreme:**

$$sinh(z+w) = sinh(z)cosh(w) + cosh(z)sinh(w)$$
$$cosh(z+w) = cosh(z)cosh(w) + sinh(z)sinh(w)$$

- **Ableitungen:** $sinh'(x) = cosh(x), cosh'(x) = sinh(x)$

5. Stetigkeit

5.1. Definition

$f : X \to Y$ heißt stetig am Punkt $a \in X$ und stetig wenn $f \, \forall a \in X$ stetig ist.

$\forall \mathcal{E} > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \mathcal{E}$

5.2. Folgenstetigkeit

Sei (x_n) eine gegen x konvergente Folge. f ist genau dann stetig, wenn

$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n \to \infty} x_n) = f(x)$

5.3. Lipschitz-Stetigkeit

$f : X \to Y$ ist Lipschitz-stetig wenn ein $L \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert sodass $\forall x_1, x_2 \in X$
$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$
und heißt lokal Lipschitz-stetig, wenn es zu jeder kompakten Menge $K \subset X$ eine lokale Lipschitz-Konstante L gibt, die obiges erfüllt.

5.4. Grenzwert von Funktionen

Für $f : X \setminus \{a\} \to Y$, ist $y \in Y$ der Grenzwert falls für alle Folgen (x_n) die gegen a konvergieren gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y$

5.5. Satz vom Minimum und Maximum

Seien $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige reelle Funktion und $A \subset X$ kompakt. Dann existieren $x_{min}, x_{max} \in A$ mit $f(x_{max}) =$ max$(f(A))$ und $f(x_{min}) =$ min$(f(A))$.

5.6. Zwischenwertsatz

Es sei $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(\alpha) < f(\beta)$. Weiter sei $y \in [f(\alpha), f(\beta)]$. Dann existiert ein $x_y \in [\alpha, \beta]$ mit $f(x_y) = y$.

5.7. Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen

Die Funktionenfolge $f_n : X \to Y$ heißt punktweise konvergent gegen eine Funktion $f : X \to Y$ wenn für alle $x \in X$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

5.8. Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : X \to Y$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : X \to Y$, falls
$\forall \mathcal{E} > 0 \, \exists N \in \mathbb{R} \, \forall n > N \, \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \mathcal{E}$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} ||f_n - f||_\infty = 0$

5.9. Stetigkeit von Grenzwertfunktionen

Konvergiert die Folge (f_n) stetiger Funktionen $f_n : X \to Y$ gleichmäßig gegen $f : X \to Y$, so ist f stetig.

6. Differenzierbarkeit

6.1. Differentialquotient

$f : I \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar bei $x_* \in I$ wenn der Grenzwert existiert
$f'(x*) = \lim\limits_{x \to x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}$

6.2. Differenzierbar impliziert Stetig

Ist $f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar bei $x_* \in I$ dann ist f auch stetig bei x_*
($\neg$ Stetig $\Rightarrow$ $\neg$ Differenzierbar)

6.3. Ableitungsregeln

- **Linearität:** $(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$
- **Produktregel:** $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- **Quotientenregel:** $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- **Kettenregel:** $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

6.4. Ableitung der Umkehrfunktion

Sei g eine stetige, streng monotone Funktion und f die Umkehrfunktion. Wenn g an der Stelle $y_* := f(x_*)$ differenzierbar ist mit $g(y_*) \neq 0$, dann ist f bei x_* differenzierbar mit $f'(x_*) = \frac{1}{g'(y_*)} = \frac{1}{g'(f(x_*))}$

6.5. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, auf (a, b) differenzierbare Funktion. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit
$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

6.6. Monotonie von Funktionen

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. $\forall x \in (a, b)$ gilt:
- f ist monoton steigend genau dann, wenn $f'(x) \geq 0$ (für streng >)
- f ist monoton fallend genau dann, wenn $f'(x) \leq 0$ (für streng <)
- f ist konstant genau dann, wenn $f'(x) = 0$

6.7. Regel von l'Hôpital

Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Und $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$, und es existiere der Limes:
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}$

1. Falls $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ gilt: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$
2. Falls $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ gilt: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$

6.8. Satz 8.28

Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{C}$. Wir nehmen an, dass

- die Funktionenfolge $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Ableitungen $f'_n : [a, b] \to \mathbb{C}$ gleichmäßig gegen ein $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ konvergiert
- die Zahlenfolge $(f_n(\overline{x}))_{n\in\mathbb{N}}$ für mindestens ein $\overline{x} \in [a, b]$ konvergiert

Dann konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, und es gilt $f' = g$. Ist zusätzlich jede Funktion f_n stetig differenzierbar, so ist auch f stetig differenzierbar.

6.9. Taylor-Polynom

Taylor-Polynom für $f \in C^n(I)$, Grad $m \in \mathbb{N}$ und $m \leq n$, an der Entwicklungsstelle $y \in I$:

$$T_m^f(y;x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k$$

6.10. Restgliedformel nach Lagrange

Es seien $f \in C^{m+1}([a, b]; \mathbb{R})$ und $x \in [a, b]$ gegeben. Dann existiert zu jedem $x \in [a, b]$ mit $x \neq y$ ein $\xi \in (a, b)$ "echt zwischen" y und x so dass

$$f(x) = T_m^f(y;x) + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-y)^{(m+1)}$$

7. Integralrechnung

7.1. Jede stetige Funktion ist eine Regelfunktion

Eine Folge von Treppenfunktionen $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert, ist gegeben durch $\phi_n(x) = f(x_k^{(n)})$ für alle $x \in (x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$, sowie $\phi_n(a) = f(a)$, wobei $(x_k^{(n)})_{k=0}^n$ mit $x_k^{(n)} = a + (b-a)\frac{k}{n}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ ist.

7.2. Rechenregel für Integrale

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ Regelfunktionen und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. Auch $\lambda f + \mu g : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist eine Regelfunktion, und das Integral ist linear:
   $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$
2. Auch $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion:
   $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)|$
3. Sind f, g reellwertig mit $f \leq g$ dann:
   $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

7.3. Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Zu gegebenem $a \in [\alpha, \beta]$ definieren wir die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ durch:

- $F(x) = \int_a^x f(t)dt$
- $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Es gilt $F'(x) = f(x)$

7.4. Partielle Integration

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

7.5. Substitutionsregel

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion $F : [a, b] \to \mathbb{C}$. Weiter sei $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ eine stetig differenzierbare Funktion.

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = F(x)|_{g(\alpha)}^{g(\beta)}$$

7.6. Uneigentliches Integral

Ist $f : [a, b) \to \mathbb{C}$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$(für $-\infty$ analog) eine uneigentliche Regelfunktion, dann ist folgender Limes das uneigentliche Integral wenn er existiert :

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c\to b} \int_a^c f(x)dx$$

7.7. Satz 9.34

Es seien $f : [a, b) \to \mathbb{C}$ und $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ uneigentliche Regelfunktionen. Gilt $|f| \leq g$, und ist g uneigentlich integrierbar, so ist auch f uneigentlich integrierbar. Insbesondere ist jede absolut integrierbare Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{C}$ auch uneigentlich integrierbar.

7.8. Restgliedformel für Integrale

Es seien $f \in C^{m+1}([a, b]; \mathbb{R})$ und $y \in [a, b]$ gegeben. Wir definieren das Taylorpolynom $T_m^f(y;x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ wie in Definition 8.33. Dann gilt für jedes $x \in [a, b]$:

$$f(x) = T_m^f(y;x) + \int_y^x \frac{(x-t)^m}{(m)!} f^{(m+1)}(t)dt$$

8. Konvexe Funktionen

8.1. Definition durch Stützebenen/Tangenten

Sei $f : I \to \mathbb{R} \in C^1$ eine konvexe Funktion, $a \in I$ und $x \neq a$ dann gilt:
$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$ [Für strikt konvex gilt $<$]

8.2. Definition durch Sekanten

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, für $(a < b) \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt:
$f(\lambda b + (1-\lambda)a) \leq \lambda f(b) + (1-\lambda)f(a)$

8.3. Konvexität und Ableitung

Sei $f \in C^2(I)$. f ist (strikt) konvex:
$\Rightarrow f'$ ist (streng) monoton steigend
$\Leftrightarrow f'' \geq 0$ Für strikt konvex folgt <u>nicht</u> $>$

8.4. Jensensche Ungleichung

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, Argumente $x_1, \ldots, x_n \in I$ und Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben, mit der Eigenschaft $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ gilt:

$$f(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

8.5. Vergleich von arithmetischem und geometrischem Mittel

Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n \in R_{\geq 0}$ dann gilt:

$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n A_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_k$ Gleicheit nur für $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$

8.6. Jensensche Integral Ungleichung

Es seien $f : [a, b] \to I, \Lambda : [a, b] \to R_{>0}$ stetige Funktionen mit $\int_a^b \Lambda(x)dx = 1$, und $g : I \to \mathbb{R}$ sei konvex.

$$g(\int_a^b f(x)\Lambda(x)dx) \leq \int_a^b g(f(x))\Lambda(x)dx$$

Ist g strikt konvex, so gilt Gleichheit genau dann, wenn f eine konstante Funktion ist.

8.7. Youngsche Ungleichung

Seien $A, B \geq 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ Dann gilt:

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

8.8. Höldersche Ungleichung

Es seien $p, q > 1$ gegeben mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für beliebige stetige Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ gilt dann:

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} (\int_a^b |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}$$

9. Bekannte Ableitungen/Stammfunktionen

9.1. Ableitungen

- $sin'(x) = cos(x), arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
- $cos'(x) = -sin(x), arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
- $tan(x) := \frac{sin(x)}{cos(x)}, tan'(x) = 1 + (tan(x))^2 = \frac{1}{(cos(x))^2}$
- $arctan'(x) = \frac{1}{1+y^2}$

9.2. Stammfunktionen

- $\int tan(x)dx = -ln(|cos(x)|)$
- $\int ln(x)dx = ln(x)x - x$

10. Eigene Notizen: