Dynamische Systeme

0 Grundlagen

Zustands-DGL: $\underline{\dot{x}} = \underline{f}\left(\underline{x}, \underline{u}, t\right)$
Ausgangsgleichung: $\underline{y} = \underline{h}\left(\underline{x}, \underline{u}, t\right)$
$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^q$, $t \in \mathbb{R}$

Steuerungsaffin: $\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \underline{g_i}(\underline{x}) u_i$

Jacobi-Matrix: $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

0.1 Linearisierung um eine Referenzlösung

Referenzlösung: $\underline{x}^*(t), \underline{y}^*(t), \underline{u}^*(t), t > 0$

Linearisierung:
$\underline{\dot{x}}^* + \Delta\underline{\dot{x}} = \underline{f}\left(\underline{x}^*, \underline{u}^*\right) + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{(x^*, u^*)} \Delta\underline{x} + \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right]_{(x^*, u^*)} \Delta\underline{u}$

Kleinsignalmodell:

$$\Delta\underline{\dot{x}} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{(x^*, u^*)} \Delta\underline{x} + \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right]_{(x^*, u^*)} \Delta\underline{u}$$

$$\Delta\underline{y} = \left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right]_{(x^*, u^*)} \Delta\underline{x} + \left[\frac{\partial h_i}{\partial u_j}\right]_{(x^*, u^*)} \Delta\underline{u}$$

Standardform: $\Delta\underline{\dot{x}} = A(t)\Delta\underline{x} + B(t)\Delta\underline{u}$
$\Delta\underline{y} = C(t)\Delta\underline{x} + D(t)\Delta\underline{u}$

0.2 Linearisierung um eine Ruhelage

Ruhelage: $\underline{\dot{x}}^* = \underline{f}\left(\underline{x}^*, \underline{u}^*, t\right) = \underline{0}$

Standardform: $\Delta\underline{\dot{x}} = A\Delta\underline{x} + B\Delta\underline{u}$
$\Delta\underline{y} = C\Delta\underline{x} + D\Delta\underline{u}$

0.3 Lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von $f(x, x_0, t)$

- Wenn f Lipschitz-stetig ist
- Lipschitz-stetigkeit schwer zu überprüfen, deshalb anderes Kriterium:
  1. f ist stetig
  2. f ist stetig diff'bar

0.4 Gültigkeitsbereich von Eigenschaften

Hyperball: $\mathcal{B}_\varepsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x - x^*\| \leq \varepsilon\right\}$
Eigenschaft gilt:
- lokal, wenn sie für alle $x \in \mathcal{B}_\varepsilon$ gilt
- global, wenn sie für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt
- uniform, wenn sie für alle $t_0 \geq 0$ gilt

0.5 Definitheit von Funktionen

Positiv definite Funktionen (pdf)

$$\begin{array}{lll} V(x) > 0 & \text{für} \quad x \neq 0 & \text{und} \\ V(x) = 0 & \text{für} \quad x = 0 & \end{array}$$

Positiv semidefinite Funktionen (psdf)

$$\begin{array}{lll} V(x) \leq 0 & \text{für} \quad x \neq 0 & \text{und} \\ V(x) = 0 & \text{für} \quad x = 0 & \end{array}$$

Negativ (semi)definite Funktionen

negativ definit: $-V(x)$ ist pd
negativ semidefinit: $-V(x)$ ist psd

Lipschitz-Stetigkeit

$\exists L \geq 0 : \|f(x, t) - f(y, t)\| \leq L \cdot \|x - y\|$

Stabilität im Sinne von Lyapunov (iSvL)

Ruhelage $x^* = 0$ ist:
- stabil: $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$
- asymptotisch stabil: $\|x(t_0\| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0 = x^*$
- uniform stabil: $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$
- uniform asymptotisch stabil: x^* ist uniform stabil und $\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$
- instabil: x^* ist nicht stabil

Lie-Ableitung von $V(x)$

$\dot{V}(\underline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \underline{f}(\underline{x})$

Lie-Ableitung

$L_f h := \nabla h \cdot f$

Mehrfache Anwendung der Lie-Ableitung

$L_f^0 h = h$
$L_f^i h = L_f L_f^{i-1} h$

Lie-Klammern

$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g = L_f g - L_g f$

ad-Operator

$\text{ad}_f^0 g = g(x)$
$\text{ad}_f^i g = \left[f, \text{ad}_f^{i-1} g\right]$

Ruhelage bestimmen

$\dot{x} = f(x, t) \overset{!}{=} 0$

1 Harmonische Balance

1.1 Periodisches Verhalten

Lösungstrajektorie: $\underline{\Phi}$
Grenzzyklus: $\underline{x}_G(t)$
Menge aller Punkte auf dem Grenzzyklus: $\{\underline{x}_G\}$
Lösungstrajektorie ist periodisch
$\Leftrightarrow \underline{\Phi}\left((t + T), t_0, \underline{x}_0\right) = \underline{\Phi}\left(t, t_0, x_0\right)$
Kleinster Abstand ρ: $\rho\left(x(t), \{x_G\}\right) = \min\limits_{\{x_G\}} \|x(t) - x_G(t)\|$
Bahnstabilität: $\{x_G\}$ ist bahnstabil $\Leftrightarrow$: $\exists \varepsilon > 0, \delta(\varepsilon) > 0$: $\rho(x_0, \{x_G\}) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x(t), \{x_G\}) < \varepsilon$
$\Rightarrow$ Anfangsabstand $\rho_0 < \delta(\varepsilon)$, dann Abstand immer $< \varepsilon$

1.2 Asymptotische Bahnstabilität

1. $\{x_G\}$ bahnstabil
2. $\lim\limits_{t \to \infty} \rho\left(x(t), \{x_G\}\right) = 0$

$\Rightarrow$ Trajektorie $x(t)$ geht auf Grenzzyklus $x_G(t)$ zu, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

1.3 Asymptotisch semistabil

$\Rightarrow$ Trajektorie $x(t)$ geht nur für bestimmte Menge an Punkten $\in \mathbb{R}^n$ auf $x_G(t)$ zu.

1.4 Existenz von Grenzzyklen in planaren Systemen

im $\mathbb{R}^2$: $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$
$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$

Benedixson-Kriterium

Hat div$\left\{\underline{f}(x_1, x_2)\right\}$ keine Vorzeichenänderung in $\mathcal{M}$, dann gibt es keinen Grenzzyklus in $\mathcal{M}$
mit div$\left\{\underline{f}(x_1, x_2)\right\} = \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right]$

ω-Limit-Set

$\lim\limits_{n \to \infty} \underline{\Phi}(t_n, t_0, x_0) = \underline{z}$
Menge aller Punkte z heißt ω-Limit-Set

1.5 Methode der Harmonischen Balance

System besteht aus Kennlinie $f(e, \text{sgn}(\dot{e}))$ und Teilsystem $G(j\omega)$.
Voraussetzungen:
- An Blöcke:
  - $f(.)$ ist punktsymmetrisch
  - $G(j\omega)$ ist LTI und hat hinreichenden Tiefpass-Charakter (d.h. relativer Nennegrad ¡ 2)
- eingeschwungen
- $e(t)$ bzw $y(t)$ sind näherungsweise harmonisch (d.h. $e(t) = A\sin(\omega t) = \text{Re}\left\{-jAe^{j\omega t}\right\}$)

Gleichung der Harmonischen Balance bzw Schwingbedingung

$\boxed{N(A) \cdot G(j\omega) = -1}$
mit Beschreibungsfunktion $N(A) = \frac{a_1 + jb_1}{A}$
inverse Beschreibungsfunktion $N_I(A) = -\frac{1}{N(A)}$

Vorgehen zum Koeffizienten-Bestimmen

1. a_1, b_1: $u(t)$ fourier-transformieren zu $\bar{u}(t)$
   $\Rightarrow a_1 = \frac{2}{T_0} \int\limits_{T_0} u(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t$;
   $b_1 = \frac{2}{T_0} \int\limits_{T_0} u(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$
2. A: $e(t) = A\sin(\omega t)$, bzw wird berechnet als A_g mit ω_g

Bestimmen von A_g, ω_g

- algebraisch:
  Aus Gleichung der Harmonischen Balance folgt: $N(A)G(j\omega) = -1$
  bzw $G(j\omega) = N_I(A) \Rightarrow$
  1. Re$\left\{G(j\omega)\right\} =$ Re$\left\{N_I(A)\right\}$
  2. Im$\left\{G(j\omega)\right\} =$ Im$\left\{N_I(A)\right\}$
- graphisch:
  $G(j\omega)$ und $N_I(A)$ in komplexer Ebene aufzeichnen
  bei Schnittpunkten gilt: $G(j\omega) = N_I(A)$
  Schnittpunkte sind mögliche Grenzschwingungen
  $\Rightarrow$ algebraisch A_g und ω_g bestimmen

Stabilität von Grenzschwingungen, graphisch bestimmen

Nyquistkriterium bzgl kritischen Punktes $N_I(A_g)$ anwenden

2 Stabilität nichtlinearer Systeme

2.1 Direkte Methode von Lyapunov

Damit kann Stabilität, aber keine Instabilität nachgewiesen werden

Zeitinvariante Systeme

Direkte Methode von Lyapunov für lokale Stabilität

x^* ist lokal (asymptotisch) stabil iSvL wenn:
- x^* ist Ruhelage
- $V(x)$ ist stetig diff'bar
- $V(x)$ ist lokal pd

wenn $\dot{V}(x) \leq 0 \Rightarrow$ lokal stabil
$\dot{V}(x) < 0 \Rightarrow$ lokal asymptotisch stabil

Direkte Methode von Lyapunov für globale Stabilität

x^* ist global (asymptotisch) stabil iSvL wenn:
- x^* ist Ruhelage
- $V(x)$ ist stetig diff'bar
- $V(x)$ ist global pd
- $V(x)$ ist radial unbeschränkt (dh $\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty$

wenn $\dot{V}(x) \leq 0 \Rightarrow$ global stabil
$\dot{V}(x) < 0 \Rightarrow$ global asymptotisch stabil

Zeitvariante Systeme

Notwendige Bedingungen damit x^* lokal uniform (asymptotisch) stabil ist:
- x^* ist Ruhelage
- $V(x)$ ist stetig diff'bar

Lokale Stabilität

x^* ist lokal uniform stabil iSvL wenn:
- $W_1(x), W_2(x)$ stetig pdf
- $W_1(x) \leq V(x, t) \leq W_2(x)$
- $\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \underline{f}(x, t) \leq 0$

x^* ist lokal uniform asymptotisch stabil wenn zusätzlich gilt:
- $W_3(x)$ stetig, lokal pdf
- $\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \underline{f}(x, t) \leq -W_3(x)$

Globale Stabilität

Uniforme Stabilität ist global wenn zusätzlich gilt:
$V(x, t)$ ist radial unbeschränkt

2.2 Häufig verwendete Lyapunov-Funktionen und deren Eigenschaften

$V(x, t = \dots$
- $\|x\|^2$: pdf, abnehmend, radial unbeschränkt
- $x^T P x$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$,pdf: pdf, abnehmend, radial unbeschränkt
- $(t + 1)\|x\|^2$: pdf, radial unbeschränkt
- $e^{-t}\|x\|^2$: pdf, abnehmend
- $\sin^2(\|x\|^2)$: lokal pdf, abnehmend

2.3 Exponentielle Stabilität

$x^* = 0$ ist exponentiell stabile Ruhelage wenn folgende äquivalente Aussagen gelten:
- $c, m, \alpha > 0$ existieren für alle $\|x(t_0)\| < c$ so dass: $\|x(t)\| \leq me^{-\alpha(t - t_0)}$
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > 0$ existieren so dass:
  $\alpha_1\|x\|^2 \leq V(x, t) \leq \alpha_2\|x\|^2$
  $\dot{V}(x, t) \leq -\alpha_3\|x\|^2$
  $\|\frac{\partial V(x, t)}{\partial \underline{x}}\| \leq \alpha_4\|x\|$

2.4 Invarianzprinzip von LaSalle

Invarianzmenge $\mathcal{M}$: $x(t_0) \in \mathcal{M} \Rightarrow x(t) \in \mathcal{M}, \forall t \geq t_0$

Invarianzprinzip

- Ω ist kompakte(dh abgeschlossen und beschränkt) Invarianzmenge
- $V(x)$ stetig diff'bar und $\dot{V}(x) \leq 0$ auf Ω
- $\varepsilon \subseteq \Omega$ mit $V(\varepsilon) = 0$
- $\mathcal{M} \subseteq \varepsilon$, $\mathcal{M}$ ist größte Invarianzmenge in ε

$\Rightarrow$ jede Lösung die in Ω beginnt, nähert sich $\mathcal{M}$ an für $t \to \infty$
daraus folgt:
Besteht $\mathcal{M}$ nur aus $\underline{0}$ und ist $\dot{V}(x) \leq 0$, dann
$\Rightarrow$ Ruhelage $\underline{0}$ ist asymptotisch stabil

Korollar: Barbashin

- x^* ist Ruhelage
- $V(x)$ ist stetig diff'bar und pdf auf $\mathcal{B}_\varepsilon$
- $\dot{V}(x) \leq 0$ auf $\mathcal{B}_\varepsilon$
- $\mathcal{S} := x \in \mathcal{B}_\varepsilon | \dot{V}(x) = 0$

Wenn nur $x(t) = 0$ in $\mathcal{S}$ bleiben kann, dann ist $x^* = 0$ asymptotisch stabil

Korollar: Krasovski (globale Variante von Barbashin)

- x^* ist Ruhelage
- $V(x)$ ist stetig diff'bar, pdf und radial unbeschränkt auf $\mathbb{R}^n$
- $\dot{V}(x) \leq 0$ auf $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{S} := x \in \mathbb{R}^n | \dot{V}(x) = 0$

Wenn nur $x(t) = 0$ in $\mathcal{S}$ bleiben kann, dann ist $x^* = 0$ global asymptotisch stabil

2.5 Indirekte Methode von Lyapunov

Zeitinvariante Systeme

Linearisierung um Ruhelage x^*:
Systemmatrix $A = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]_{x=x^*}$

- A ist negativ definit $\Rightarrow x^*$ ist lokal asymptotisch stabil
- A ist indefinit oder positiv (semi-)definit $\Rightarrow x^*$ ist lokal instabil
- A ist negativ semidefinit $\Rightarrow$ keine Aussage über x^* möglich

Zeitvariante Systeme

Linearisierung um Ruhelage x^*
$\Rightarrow \dot{x} = A(t)x + f_1(x,t)$, wobei

- $A(t) = \left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right]_{x=x^*}$
- $f_1(x,t)$ Restterm

Bedingung: Vereinfachte Linearisierung $\dot{x} = A(t)x$ gültig falls:
$\lim\limits_{\|x\| \to 0} \sup\limits_{t \geq 0} \frac{\|f_1(x,t)\|}{\|x\|} = 0$
Stabilität des nichtlinearen Systems

- x^* ist uniform asymptotisch stabil in Linearisierung
  $\Rightarrow x^*$ ist uniform asymptotisch stabil im nichtlinearen System
- x^* ist instabil in Linearisierung
  $\Rightarrow$ keine Aussage über x^* im NL System möglich
- x^* ist instabil in Linearisierung und $A(t) = A_0 = const$
  $\Rightarrow x^*$ instabil im NL System

Stabilität von LTV Systemen(1)

Ruhelage des LTV Systems ist exponentiell stabil wenn $\left[A(t) + A(t)^T\right]$ negativ definit ist für alle t

Stabilität von LTV Systemen(1)

Ruhelage des LTV Systems ist exponentiell stabil wenn $A(t)$ negativ definit ist und $A(t)$ beschränkt ist, dh
$\int\limits_0^\infty A(t)^T A(t)\,\mathrm{d}t < \infty$

2.6 Instabilität

Falls Stabilität nicht nachgewiesen werden kann, versucht man Instabilität nachzuweisen

Satz von Chetaev

- $x^* = 0$ ist Ruhelage
- $V(x)$ ist stetig diff'bar, $V(0) = 0$, $V(x_0) > 0$ für $\|x_0\| > 0$
- $\mathcal{U} := \{x \in \mathcal{B}_\varepsilon | V(x) > 0\}$

Wenn $\dot{V}(x) > 0$ auf $\mathcal{U}$, dann ist $x^* = 0$ instabil
Bemerkung:

- $V(x)$ muss keine pdf sein
- Es genügt Menge $\mathcal{U}$ zu finden, so dass: $V(x) > 0$ und $0 \in \mathcal{U}$

2.7 Einzugsgebiet

Falls asymptotisch stabile Ruhelage nicht global asymptotisch stabil
$\Rightarrow$ Einzugsgebiet bestimmen, in der die Ruhelage lokal asymptotisch stabil ist

Einzugsgebiet, Domain of Attraction, Basin

$\mathcal{A}(x^*) := \left\{x_0 | \lim\limits_{t \to \infty} \Phi(t, t_0, x_0) = x^*\right\}$
mit $\Phi(t, t_0, x_0)$ als Lösung der DGL

Bestimmen des Einzugsgebiets

- x^* ist Ruhelage, asymptotisch stabil
- $\mathcal{V} = x^* \cup \left\{x | V(x) > 0, \dot{V}(x) < 0\right\}$
- $\mathcal{E}_c = \{x | V(x) \leq c\}$

Wenn $\mathcal{E}_c \subseteq \mathcal{V}$ und $\mathcal{E}_c$ ist beschränkt, dann ist $\mathcal{E}_c$ Teilmenge des Einzuggebiets

2.8 Lyapunov-basierter Reglerentwurf

1. $V(x)$ so aufstellen, dass u in $V(x)$ und in $\dot{V}(x)$ vorkommt
2. u so einstellen, dass $V(x) > 0$ und $\dot{V}(x) < 0$

3 Passivität

Achtung: $V(x)$ ist abstrakte Speicherfunktion
Energiespeicherfunktion zB aus physikalischer Energiebetrachtung

Verallgemeinerte Energiebilanz und Versorgungsrate eines Systems:
$\int\limits_0^t s(u,y)\,\mathrm{d}\tau + V(x(0)) = \int\limits_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + V(x(t))$
Mit:
Netto-Energiezufluss: $\int\limits_0^t s(u,y)\,\mathrm{d}\tau$
Versorgungsrate: $s(u,y)$
Anfangs gespeicherte Energie: $V(x(0))$
dissipierte Energie: $\int\limits_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$
dissipierte Leistung: $g(\tau)$
gespeicherte Energie: $V(x(t))$
Es gilt $\int\limits_0^t |s(u(\tau), y(\tau))|\,\mathrm{d}\tau < \infty$

Dissipativität (dissipativ bzgl $s(u,y)$)

$V(x)$ ist psdf
Integrale Dissipativitätsungleichung: $\int\limits_0^t s(u,y)\,\mathrm{d}\tau + V(x(0)) \geq V(x(t))$
Differentielle Dissipativitätsungleichung: $s(u,y) \geq \dot{V}(x(t))$

Passivität

Dissipativ bzgl spezieller Versorgungsrate $s(u,y) = y^T u$
$V(x)$ ist psdf
Integrale Passivitätsungleichung: $\int\limits_0^t y^T u\,\mathrm{d}\tau + V(x(0)) \geq V(x(t))$
Differentielle Passivitätsungleichung: $s(u,y) \geq \dot{V}(x(t))$

streng passiv:	$\Rightarrow$ bei '>'	bzw $g(t) > 0$
verlustlos:	$\Rightarrow$ bei '='	bzw $g(t) = 0$

3.1 Passivität und Stabilitätseigenschaften

Passivität und Lyapunov-Stabilität

- System ist passiv
- V ist stetig diff'bar und psd

$\Rightarrow$ Ruhelage $x = 0$ ist stabil iSvL

Null-Zustandsbeobachtbarkeit

Nur $x^* = 0$ kann in $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R} | h(x, 0) = 0\}$ bleiben

Passivität und asymptotische Stabilität

$x^* = 0$ ist asymptotisch stabil wenn eine der beiden Punkte zutrifft:

- System ist streng passiv
- über $V(x)$:
  - System ist passiv
  - $V(x)$ ist stetig diff'bar und pdf
  - $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow y = 0$
  - Null-Zustand beobachtbar

Wenn $V(x)$ zusätzlich radial unbeschränkt ist $\Rightarrow$ $x^* = 0$ ist global asymptotisch stabil

4 Passivitätsbasierte Regelung

$x^* = 0$ ist global asymptotisch stabil
$\Rightarrow$ System kann stabilisiert werden mit $u = -\Phi(y)$, wobei:

- Φ ist lokal Lipschitz-stetig
- Φ ist beliebig
- $\Phi(0) = 0$
- $y^T \Phi > 0$ für $y \neq 0$

mögliche Φ: $\Phi = k_i \,\mathsf{sat}(y_i)$
$\Phi = \frac{2k_i}{\pi} \,\mathsf{atan}(y_i)$

Feedback-Passivierung

Ziel: Nicht-Passive Systeme in passive transformieren durch spezielle Wahl der Ausgangsfunktion $y = h(x)$
$\dot{x} = f(x) + G(x)u$
$\Rightarrow$ Ausgang $y = h(x) \overset{\text{def}}{=} \left[\frac{\partial V}{\partial x} G\right]^T$
Ist Ausgang dann Null-Zustandsbeobachtbar $\Rightarrow$ es kann global stabilisierendes Regelgesetz gefunden werden

5 Feedback-Linearisierung

Nichtlineare System-Transformation: $z = \varphi(x)$

5.1 Vorgehen

1. Zustandstransformation: $z = \varphi(x)$
2. NL-RNF aufstellen
3. Überprüfen ob $\varphi(x)$ ein Diffeomorphismus ist
4. Feedback-linearisierendes Regelgesetz aufstellen

Nichtlineare Regelungsnormalform, NL-RNF

$$
\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= z_3 \\
&\dots \\
\dot{z}_n &= a(x) + b(x)u
\end{aligned}
$$

Diffeomorphismus

$z = \varphi(x)$ ist (lokal) gültige Zustandstransformation wenn $\nabla\underline{\varphi}$ nicht singulär ist, $\Leftrightarrow \det(\nabla\varphi) \neq 0$
$\nabla\underline{\varphi} = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right]$, Jacobi-Matrix

Feedback-linearisierendes Regelgesetz

$u(x) = \frac{1}{b(x)}[v - a(x)]$
$\Rightarrow \dot{z}_n = v$

6 E/A-Linearisierung

Vorgehen

1. Ausgang y festlegen, dessen dynamische Antwort auf Reglereingang v linearisiert werden soll
2. Zeitliche Ableitung des Ausgangs y liefert nach einigen Schritten die E/A-Beziehung in RNF
3. Aus RNF das feedback-linearisierende Regelgesetz aufstellen
4. Bei Bedarf Systemtransformation durchführen, so dass $\dot{z}_n = v$

$\dot{x} = f(x) + g(x)u$
$\Rightarrow \dot{y}(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) + \frac{\partial h}{\partial x} g(x)u = L_f h(x) + L_g h(x)u$

zu 2.

y so lange ableiten bis: $\overset{(r)}{y} = a(x) + b(x)u$

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= L_f h & (\text{mit} L_g h(x) = 0) \\
\ddot{y} &= L_f^2 h & (\text{mit} L_g L_f h(x) = 0) \\
&\dots \\
\overset{(r)}{y} &= L_f^r h + L_g L_f^{r-1} h(x)u
\end{aligned}
$$

zu 3.

$u(x) \overset{!}{=} \frac{1}{b(x)}[v - a(x)]$
Neuer virtueller Systemeingang: $v = \overset{r}{y}$
Regelgesetz: $u(x) = \frac{v - L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}$

Relativer Grad bzw Differenzengrad

Vollstandige Linearisierung: $r = n$
interne Dynamik vorhanden: $r < n$
Nulldynamik: $y(t) = 0, \forall t$, mit interner Dynamik

6.1 Zustands-Linearisierung

$\dot{x} = f(x) + g(x)u$
$\dot{z} = \nabla\varphi(x)\,(f(x) + g(x)u)$

Vorgehen

1. Nichtlineare Zustandstransformation bestimmen $\Rightarrow \varphi(x)$
2. Regelgesetz bestimmtn

zu 1.

GLS lösen:

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} g^T \\ [\mathsf{ad}_f g]^T \\ \vdots \\ [\mathsf{ad}_f^{n-2} g]^T \\ [\mathsf{ad}_f^{n-1} g]^T \end{bmatrix}}_{S^T} \left[\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x}\right]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g^* \end{bmatrix}
$$

Matrix S ist Erreichbarkeitsmatrix

GLS ist gleichbedeutend mit:
$L_g L_f^i \varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & i = 0, \dots, n-2 \\ \hat{g}^*(x), & i = n-1 \end{cases}$

ist gleichbedeutend mit:

$$\left[\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x}\right] \mathrm{ad}_f^i\, g(x) = \begin{cases}0, & i = 0,\dots,n-2\\ \hat{g}(x), & i = n-1\end{cases}$$

wobei:
$\hat{g}^*, g^* \neq 0$
$g* = (-1)^{n-1}\hat{g}^*$

Dann nach $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}$ auflösen und daraus φ_1 bestimmen.
Für die restlichen φ_i gilt: $\varphi_i(x) = L_f^i\varphi_1$

zu 2.

Regelgesetz: $u(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1}\varphi_1(x)}\left(v - L_f^n\varphi_1(x)\right)$
wobei v: neuer Regeleingang

7 Flachheitsbasierte Regelung

Vorgehen

1. Flachheitsanalyse
2. Flachheitsbasierte Steuerung
3. Flachheitsbasierte Folgeregelung

zu 1. Flachheitsanalyse

System ist flach wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- es gibt (fiktiven) Ausgang $y = \Phi(x, u, \dot{u}, \dots, \overset{(\alpha)}{u})$ mit dim y = dim u
- eine (lokal) eindeutige Zustandsfunktion kann gefunden werden: $x = \Psi_1(y, \dot{y}, \dots, \overset{(\gamma)}{y})$
- eine (lokal) eindeutige Eingangsfunktion kann gefunden werden: $u = \Psi_2(y, \dot{y}, \dots, \overset{(\gamma+1)}{y})$

Flachen Ausgang bestimmen

- Ausgang sollte möglichst viel Information über das dynamische Systemverhalten haben
- Sukzessive zeitliche Ableitung des Kandidaten zur Herleitung von Gleichungen zur Bestimmung von x und u
- y muss so oft abgeleitet werden, bis aus dem resultierenden GLS von $y, \dots, \overset{\gamma}{y}$ alle unbekannten x und u (lokal) bestimmt werden können
- Kandidat ist umso erfolgversprechender, je häufiger abgeleitet werden kann ohne dass Eingänge u auftauchen

Danach $x = \Psi_1(y, \dot{y}, \dots, \overset{(\gamma)}{y})$ und $u = \Psi_2(y, \dot{y}, \dots, \overset{(\gamma+1)}{y})$ bestimmen

zu 2. Flachheitsbasierte Steuerung

Solltrajektorie bestimmen:

1. y_d bestimmen: entweder vorgegeben oder falls y_d nicht vorgegeben, dann aus x_d oder Regelgröße w bestimmen
2. zugehörige x_d und u_d bestimmen

zu 3. Flachheitsbasierte Folgeregelung

Zustandsrückführung und Nichtlineares Regelgesetz aufstellen

1. fiktive (differentierte) Ausgänge $\left[y, \dots, \overset{(\alpha)}{y}\right]$ als Eingänge v einführen
2. Nichtlineares Regelgesetz aufstellen: $u = \Psi\left(y, \dots, \overset{(\alpha)}{y}, v\right)$
3. Zustandstransformation: $z = \dots$
4. Zustands-DGL: $\dot{z} = \dots$

8 Backstepping

8.1 Anwendungsgebiet

$u \to \dot{x}_n \to \int \dots \to \dot{x}_i \to \int \to \dot{x}_1 \to \int \to x_1$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2\\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3\\
&\vdots\\
\dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_i) + g_i(x_1, \dots, x_i)x_{i+1}\\
&\vdots\\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) + g_n(x_1, \dots, x_n)u
\end{aligned}$$

8.2 Verfahren (rekursiv anwenden)

System wird in Teilsysteme unterteil. Ausgang des einen Teilsystems ist Pseude-Stellgröße des nachfolgenen Systems.

1. Transformiertes Teilsystem aufstellen
   $z = \dots$
   $\dot{z} = \dots$
2. Pseudo-Stellgröße festlegen
3. Partielle Lyapunov Funktion aufstellen:
   - Meist:
     $V_1 = \frac{1}{2}z_1^2$
     $V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}z_i^2$
     $V_n = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2$
   - $\dot{V}_i = \Psi(z, x_{i+1}) \Rightarrow x_{i+1}$ so festlegen, dass $\dot{V}_i^* < 0$
4. Funktion für gewünschte Stellgröße α_i bestimmen: $x_{i+1} := \alpha_i$
5. So lange rekursiv anwenden bis $\alpha_i = u$

9 Sliding Mode Regelung

System: $\dot{x} = f(x) + g(x)u + d(t)$
wobei $d(t)$ unbekannte Störfunktion ist
Schaltmannigfaltigkeit: $S = \{x \in \mathbb{R}^n | s(x) = 0\}$
unstetige Stellgröße: $u(x) = \begin{cases}u^+(x) & \text{für} s(x) > 0\\ u^-(x) & \text{für} s(x) < 0\end{cases}$
unstetiges Systemverhalten: $\dot{x} = \begin{cases}f^+(x) & \text{für} s(x) > 0\\ f^-(x) & \text{für} s(x) < 0\end{cases}$
Regelziel: Systemzustand soll nach ersten Kontakt auf Schaltmannigfaltigkeit $s(x) = 0$ bleiben
Gezielte Unterdrückung von Störung ist möglich wenn:

- $d(x,t)$ liegt in dem von $g(x)$ aufgespannten Raum
- $|d_i| < D_i, D_i = const \in \mathbb{R}$

Vorgehen

1. Diskontinuierliche Reglerfunktion finden, so dass System in endlicher Zeit in den Sliding Mode geht
2. Schaltmannigfaltigkeit so wählen, dass im Sliding Mode gewünschte Systemdynamik auftritt

zu 1.

Um in den Sliding Mode zu kommen muss gelten:

- $s_i\dot{s}_i < 0$
- $\lim\limits_{s_i(x)\to 0^+} \dot{s}_i(x) = k^- < 0$ und $\lim\limits_{s_i(x)\to 0^-} \dot{s}_i(x) = k^+ > 0$

zu 2., Beschreibung des Systemverhaltens $\dot{x}$

Idealer Sliding Mode nach Filippov

$\dot{x} = f(x)$
Ansatz: $\dot{x}_{\text{fi}} = \alpha f^+(x) + (1-\alpha)f^-(x)$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$
Bedingung: $\dot{s}(x_{\text{fi}}) = \frac{\partial s}{\partial x}\dot{x}_{\text{fi}} = 0$

Man erhält: $\alpha = \dfrac{\frac{\partial s}{\partial x}f^-(x)}{\frac{\partial s}{\partial x}(f^-(x) - f^+(x))}$
und somit:
$\dot{x}_{\text{fi}} = \dfrac{\frac{\partial s}{\partial x}f^-(x)}{\frac{\partial s}{\partial x}(f^-(x) - f^+(x))}f^+(x) - \dfrac{\frac{\partial s}{\partial x}f^+(x)}{\frac{\partial s}{\partial x}(f^-(x) - f^+(x))}f^-(x)$
Wobei: $\frac{\partial s}{\partial x}f^- \geq 0$ und $\frac{\partial s}{\partial x}f^+ \leq 0$

Idealer Sliding Mode nach der Equivalent Control Method

$\dot{x} = f(x) + g(x)u$
Es gilt: $s(x) = 0, \dot{s}(x) = 0$
Daraus folgt: $\dot{s}(x) = L_f s(x) + L_g s(x)\tilde{u}_{\text{eq}}$
Kontinuierliche Ersatzstellgröße: $\tilde{u}_{\text{eq}} = -L_g s(x)^{-1}L_f s(x)$
Systemdynamik: $\dot{x} = f(x) - g(x)L_g s(x)^{-1}L_f s(x)$

9.1 Blockschaltbild