EMF Formel-Zusammenfassung

Die Zusammenfassung basiert auf der Kurzwiederholung der gesamten Kapitel des Zentralübungsleiters Christoph Weiß.

1. Klassische Kontinumstheorie

1.1. Maxwellsche Gleichungen

Gaußsches Gesetz:
$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho$

Faradaysches ind. Gesetz
$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Quellfreiheit des magn. Feldes
$\operatorname{div} \vec{B} = 0$

Ampèrsches Gesetz
$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

1.2. Materialgleichungen

$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ $\qquad$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$ $\qquad$ $\vec{j} = \sigma \vec{E} + \cdots$

1.3. Energie

$$\delta w_{\text{el}} = \vec{E} \cdot \delta \vec{D} \quad \overset{\epsilon\ const}{\rightarrow} \quad w_{\text{el}} = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}$$

$$\delta w_{\text{mag}} = \vec{H} \cdot \delta \vec{B} \quad \overset{\mu\ const}{\rightarrow} \quad w_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B}$$

1.4. Bilanzen

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_x = \Pi_x$$

$\rightarrow$ Ladungserhaltung: $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$

Energiebilanz (Poynting-Vektor): $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$

1.5. Potentiale

$\phi, \vec{A}$ $\quad \Rightarrow \quad$ $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ $\qquad$ $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Eichfreiheit: $\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \lambda$ $\qquad$ $\phi' = \phi + \frac{\partial \lambda}{\partial t}$

Lorenz-Eichung: $\operatorname{div} \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$

Coulomb-Eichung: $\operatorname{div} \vec{A} = 0$

1.6. Materialgrenzen

$\vec{D}_2\vec{n} - \vec{D}_1\vec{n} = \sigma_{int}$	$\vec{E}_1 \times \vec{n} - \vec{E}_2 \times \vec{n} = 0$
$\vec{B}_2\vec{n} - \vec{B}_1\vec{n} = 0$	$\vec{H}_2 \times \vec{n} - \vec{H}_1 \times \vec{n} = \vec{i}$

1.7. RWP der Potentialtheorie

ϕ: stetig an Grenzfläche $\Rightarrow \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$

1.8. RWP

- Ω
- $\operatorname{div}(\epsilon\vec{\nabla}\phi) = -\rho$
- Randwerte

1.9. Lösungsmethoden

$$\phi = \phi^{(0)} + \varphi$$
$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \int_\Omega G(\vec{r}, \vec{r}')\rho((\vec{r}')\,\mathrm{d}^3r'$$

Bestimmen der $G(\vec{r}', \vec{r}')$:

- Spektralzerlegung
- Als Lösung einer Punktladung der Größe 1

1.10. Korrespodenzprinzip

- $\operatorname{div}(\kappa\vec{\nabla}T) = 0$
- $\operatorname{div}(\sigma\vec{\nabla}\phi) = 0$

2. Kompaktmodelle

Gebiet $\Omega \rightarrow$ Knoten + Zweige
Vorrausetzung: Quasistationarität
$\Rightarrow$ Knotenregel + Maschenregel

2.1. Kapazitätsmatrix ($\rho = 0$)

$$Q_k = \sum_{l=1}^{N} C_{kl}V_l \qquad \vec{Q} = \underset{\sim}{\boldsymbol{C}}\vec{V} \qquad W_{\text{el}} = \frac{1}{2}\vec{V}^\top\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}\vec{V}$$

Eigenschaft von $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$: symmetrisch, positiv **semi**-definit, nicht invertierbar, Alle Zeilen-/Spaltensummen = 0

2.2. Induktivitätsmatrix

$$u_k(t) = r_k i_k(t) + \sum_{l=1}^{N} L_{kl}\frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{d}t} \text{ (Trafo)} \qquad W_{\text{mag}} = \frac{1}{2}\vec{I}^\top\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}\vec{I}$$

Eigenschaft von $\underset{\sim}{\boldsymbol{L}}$: symmetrisch, positiv definit (Unterschiede zu Kapazitätsmatrix!)

2.3. Wechselstrom

$u(t) = \hat{U}\sin(\omega t + \varphi_m) = Im[\hat{\boldsymbol{U}}e^{j\omega t}]$ $\Rightarrow$ Zeiger $\hat{\boldsymbol{U}} \in \mathbb{C}$ $\hat{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{I}}$	$i(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_m) = Im[\hat{\boldsymbol{I}}e^{j\omega t}]$ $\Rightarrow$ Zeiger $\hat{\boldsymbol{I}} \in \mathbb{C}$ $\hat{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{Y}\hat{\boldsymbol{U}}$

Widerstand: $\boldsymbol{Z} = R$ Kondensator: $\boldsymbol{Z} = \frac{1}{j\omega C}$ Spule: $\boldsymbol{Z} = j\omega L$

Leistung: $\boldsymbol{P} = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{U}}\hat{\boldsymbol{I}}^* = P_w + jP_B \quad P_S = |\boldsymbol{P}|$

3. Harmonische EM-Wellen ($\sigma = 0$)

$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \varphi_0)$

Richtung von $\vec{k}$: Ausbreitungsrichtung der Welle

$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu\omega}\vec{k} \times \vec{E}$ $\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{\epsilon\omega}\vec{k} \times \vec{H}$

$\vec{H} \perp \vec{E}$ $\vec{H} \perp \vec{k}$ $\vec{E} \perp \vec{k}$

Erfüllt die Wellengleichungen, wenn gilt: $\omega = c\left|\vec{k}\right|$
Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$ mit $\epsilon\mu c^2 = 1$

Allgemeiner:
$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{01}\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \varphi_1)\vec{e}_1 + E_{02}\cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \varphi_2)\vec{e}_2$
mit $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \Rightarrow$ Polarisation