Zusammenfassung EI SoSe 2011

Emanuel Regnath

August 2, 2011

1 Elektrismus und Magnizität

Hauptsatz der Elektrostatik: Elektrische Felder sind konservativ!

1.1 Elektrische Ladung

$Q = \pm N_e \cdot e^-$ $\qquad [Q] = 1C(oulomb) = 1As$
Ungleichenamige Ladungen ziehen sich an, gleichnamige stoßen sich ab(Coulomb-Kraft).
Ladungen erzeugen Elektrische Felder/Verschiebungsfelder!
Ladungen$\rightarrow$ C-Kräfte $\rightarrow$ D-Feld/E-Feld $\rightarrow$ Potential/Spannung

1.2 Elektrisches Verschiebungsfeld

1.2.1 Gaußsches Gesetz

Beschreibt den Elektrischen Fluss durch ein Kontrollvolumen V mit Hüllfläche ∂V

$$\boxed{\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{a} \equiv Q(V)}$$

Raumladungsdichte($\rho = \frac{Q(V)}{V}$): $Q(V) = \iiint_V \operatorname{div} \vec{D} \, \mathrm{d}^3 r = \iiint_V \rho(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$
Oberflächenladungsdichte($\sigma = \frac{Q(A)}{A}$): $Q(A) = \iint_A \sigma(\vec{r}) \, \mathrm{d}a$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \cdot \operatorname{grad}(\Phi)) = -\rho$$

Poisson-Gleichung: $\boxed{\Delta \Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}}$ $\qquad \Delta$:Laplace-Operator

1.3 Coulomb Potential

Elektrisches Potential am Punkt $P = O + \vec{r}$ im Bezug auf $P_0 = O + \vec{r}_0$:

$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}_0) - \int_{P_0}^{P} \vec{E} \mathrm{d}\vec{r}}$ $\qquad \Phi(\vec{r}_0)$: Bezugspotential(meist $\Phi(\vec{r}_0) = 0$, und $r_0 = \infty$)

Für diskrete Punktladungen am Ort $\vec{r}_i$ gilt:

$$\Phi(\vec{r}) = -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Falls eine kontinuierliche Raumladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ gegeben ist, gilt:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{E_3} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}^3 r'$$

1.3.1 Spannnung

Die Differenz zwischen zwei elektrischen Potentialen an den Punnkten P_1,P_2 nennt man Spannung:

$$\boxed{U_{12} = \Phi(P_1) - \Phi(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \underbrace{\int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}_{\Phi(P_1)-\Phi(P_0)} + \underbrace{\int_{P_0}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}_{-\Phi(P_2)+\Phi(P_0))} = \frac{W_{12}}{q}}$$

1.4 Elektrische Feld

Elektrische Felder werden von Ladungen erzeugt.

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) := \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q} = -\mathrm{grad}(\Phi) = -\nabla\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i'}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|^3} q_i \quad (1)}$$

Regeln:

1. Innerhalb eines idealen Leiters ist das E-Feld Null(Influenz).
2. Die Feldlinien stehen immer senkrecht auf eine Leiteroberfläche.
3. Die Feldlinien laufen von positiven zu negativen Ladungen.
4. Bei Kugelladungen sinkt das E-Feld radial mit $\frac{1}{r^2}$
5. Bei unendlicher Linienladung sinkt das E-Feld radial mit $\frac{1}{r}$
6. Bei unendlicher Flächenladung bleibt das E-Feld konstant.

1.4.1 Influenz

Frei bewegliche Ladungsträger(Elektronen) ordnen sich innerhalb einer ideal leitenden Umgebung so an, dass sie einem äußeren E-Feld entgegenwirken.

1.5 Elektrische Kapazität

Die Kapazität zwischen zwei Leitern $L1$ mit Hüllefläche $H1$ und einem Leiter $L2$:

$$\boxed{C = \frac{Q}{U_{12}}} = \frac{\int_H 1\varepsilon \vec{E} \mathrm{d}\vec{a}}{\int_{L1}^{L2} \vec{E} \mathrm{d}\vec{r}}$$

Im Plattenkondensator mit homogenen ε und $A >> d$ gilt:
$C = \frac{Q}{U} = \frac{E \cdot d}{A\epsilon E} = \varepsilon \frac{A}{d}$
Außerhalb des Kondensators ist $\vec{E} = 0$, da sich die Felder der beiden Platten auslöschen.
Kugelkondensator(a Innenradius): $C = \frac{Q}{U_{ab}} = 4\pi\varepsilon \frac{ab}{a-b}$

1.6 Stationäre Ströme

Stromstärke $I(A)$ durch eine Fläche A mit Stromdichte $\vec{j}$:

$$\boxed{I(A) = \iint_A \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{a}} \qquad \vec{j} = \sum_{\alpha=1}^{K} q_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha = \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{K} |q_\alpha| n_\alpha \mu_\alpha}_{\sigma} \vec{E} \quad (2)$$

Für K verschiedene Ladungsträgersorten mit spez. Ladung q_α, Trägerdichte n_α und Dirftgeschwindigkeit $\vec{v}_\alpha$

Für eine Trägersorte: $\vec{j} = qn\vec{v} = \rho\vec{v}$

Ladungsträgertransport:
$m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E}$
$\underbrace{\frac{1}{2}m\left(v(t_2)^2 - v(t_2)^2\right)}_{\Delta E_{kin}} = \underbrace{q \cdot U_{12}}_{-\Delta E_{el}}$
Mit Stoßprozessen(Drudes Driftmodell):
$q \cdot \vec{E} = m^* \frac{\vec{v}}{\tau}$ $\quad$ τ Mittlere Stoßzeit, m^* effektive Masse, $\vec{v}$ Driftgeschw.
$\vec{v}(\vec{E}) = \frac{q \cdot \tau}{m^*} \cdot \vec{E} = sgn(q)\mu \cdot \vec{E}$
$\Rightarrow \vec{j} = |q|n\mu\vec{E} = \underbrace{\sum_{\alpha}^{K} |q_\alpha| n_\alpha \mu_\alpha}_{\sigma} \vec{E}$ (lokales ohmsches Gesetz)
$\sigma > 0 \ \Rightarrow$ el. Strom fließt in Richtung abnehmender Potentialwerte!
$I = \underbrace{\sigma \frac{A}{l}}_{=G} U \qquad \Rightarrow \qquad I = GU \quad U = RI$ $\quad$ ohmsches Gesetz in integraler Form
σ Leitfähigkeit, n Trägerdichte

Ladungsbilanz:
$\int_{\partial V} \vec{j}\mathrm{d}\vec{a} = \underbrace{-\frac{\mathrm{d}Q(V)}{\mathrm{d}t}}_{Stromabfluss}$ $\qquad$ stationärer Strom: $\frac{\mathrm{d}Q(V)}{\mathrm{d}t} = 0$
Kirchoff Knotenregel: $\sum_{k=1}^{N} \int_{A_k} \vec{j}\mathrm{d}\vec{a} = \sum_{k=1}^{N} I_k = 0$
Ladungsbilanzgleichung: $\mathrm{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$
homogene Poissongleichung: $\mathrm{div}(\sigma\nabla\Phi) = 0$

1.7 Elektrische Arbeit und Leistung

Elektrische Feldenergiedichte:
$\boxed{w_{el} = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}}$
Bei einer Punktladung gilt:
Arbeit: $\mathrm{d}W_{el} = \vec{F}_{el}\,\mathrm{d}\vec{r} = q\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = Q \cdot U$

Kondensator: $\boxed{W_{el} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2}$

Leistung: $P_{el} = \frac{\mathrm{d}W_{el}}{\mathrm{d}t} = q\vec{E}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = q\vec{E}\vec{v}$
Leistungsdichte: $p_{el} = \frac{N}{V}P_{el} = nq\vec{v}\vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

Bei ohmschen Widerstand($\vec{j} = \sigma\vec{E}$):
$p_{el} = \sigma|\vec{E}|^2 = \frac{1}{\sigma}|\vec{j}|^2 \geq 0$

$P_{el} = p_{el} \cdot V = |\vec{j}|A|\vec{E}|l = U \cdot I = R \cdot I^2$

Für ein Strömungsfeld mit K Trägersorten $\vec{j} = \sum_{\alpha=1}^{K} q_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha$

1.7.1 Energieübertragung

P_V: Leistung des Verbrauchers, P_G: Leistung des Generators, R_L: Leistungswiderstand.
$\eta = \frac{P_v}{P_G} = \frac{U_V}{U_G} = 1 - \frac{R_L P_G}{U_G^2} \quad \Rightarrow \quad U_G$ sehr groß!

1.8 Magnetostatik

Mgnetische Flussdichte: $\vec{B}(\vec{r}, t) \qquad \dim(\vec{B}) = 1\frac{Vs}{m^2} = 1T$
Bei Zeichnungen: $\odot$: Vektor aus Zeichenebene, $\otimes$ Vektor in Zeichenebene.
Es gibt keine magnetischen Monopole, B-Feldlinien sind stets geschlossen!
$\int_{\partial V} \vec{B}\, \mathrm{d}\vec{a} = 0 \qquad$ (immer gültig)
$\boxed{\mathrm{div}\vec{B} = 0}$
Magnetfelder werden von bewegten Ladungen erzeugt.
$\int_{\partial A} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 I(A) = \mu_0 \cdot \int_A \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{a}$

1.8.1 Lorentzkraft

Auf eine im Magnetfeld $\vec{B}$ bewegte Ladung q wirtk eine Kraft $\vec{F}_L$
Kraft auf Ladungsträger α: $\boxed{\vec{F}_{L,\alpha} = q_\alpha(\vec{v}_\alpha \times \vec{B})}$
Kraftdichte: $\boxed{\vec{f}_L = \vec{j} \times \vec{B}}$

Kraft auf Leiter: $\vec{F}_{Leiter} = \int_V \vec{f}_L \mathrm{d}V = \iiint_{Leiter} \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\, \mathrm{d}^3 r$
Kraft auf Linienförmigen Leiter mit konstanter Querschnittsfläche:
$\vec{F}_{Leiter} = l \cdot A(\vec{j} \times \vec{B}) = -I \int_C \vec{B}(\vec{s}) \times \mathrm{d}\vec{s} = \int_C \mathrm{d}\vec{F}_L \qquad \boxed{\mathrm{d}\vec{F}_L = I \cdot \mathrm{d}\vec{s} \times \vec{B}}$
Kraft auf geschlossene Leiterschleife verschwindet! $\vec{F}_{Leiter} = 0$
Drehmoment auf Leiterschleife: $\vec{F}_{Leiter} = \int_C \mathrm{d}\vec{F}_L = \sum_{i=1}^{N} \int_{Ci} \mathrm{d}\vec{F}_{Li}$
Drehmoment auf beliebig geformte ebene Leiterschleife mit Fläche A: $\boxed{\vec{M} = I\vec{A} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}}$

1.8.2 Permanentmagnet

Material in dem sehr viele ($10^{22} \cdot 10^{23} cm^{-3}$) atomare Ringströme von gleichorientierten magnetischen Moment $\vec{m}_0$ Domänen bilden.
Magnetisierung: $\frac{magn.Moment}{Volumen} = \vec{\mathcal{M}} = n \cdot \overline{\vec{m}_0}$
Drehmoment auf Permanentmagnet mit Volumen V: $\vec{M} = V \cdot (\vec{\mathcal{M}} \times \vec{B}) = \vec{m} \times \vec{B}$
Makroskopische Ringströme und Permanentmagneten zeigen gleiches Verhalten!

1.8.3 Elektromagnetische Kraft

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ wirken gleichzeitig: Superposition.
Kraft auf Punktladung: $\vec{F}_{em} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Kraftdichte: $\vec{f}_{em} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \qquad \rho = \sum_{\alpha=1}^{K} n_\alpha q_\alpha$

$P_{mag} = \frac{\mathrm{d}W_{mag}}{\mathrm{d}t} = 0$ Magnetfeld leistet keine Arbeit. $E_{kin} = const.$

Ladungsbewegung im homogenen Magnetfeld(Kreisbahn):
Lräftegleichgewicht: $\vec{F}_L = \vec{F}_Z \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_\perp^2}{r} = |q\vec{v} \times \vec{B}| = qv_\perp B$
$\frac{mv_\perp}{r} = qB \qquad v_\perp = r\Omega$
$m\Omega = qB \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega}$

Mit $v_{||}$: Helix(Schraube) mit Radius $r = \frac{v_\perp}{\Omega} = \frac{v_\perp m}{qB}$

1.8.4 Hall-Effekt

In einem Stromdurchflossenen Leiter der Länge x, Breite z und Höhe y werden Ladungen durch ein magnetisches Querfeld $\vec{B}_z$ zum Rand des Leiters abgelenkt. Dadurch entsteht eine Querspannung U_H. Kräftegleichgewicht: $F_{el} = F_L \quad \Rightarrow \quad |q|v_x B_z = qE_y$
$v_x = \frac{U_H}{yB_z}$
$j_x = \frac{I_x}{y \cdot z} = qn \cdot v_x = \rho v_x$

1.9 Magnetostatische Felder

Amperesches Durchflutungsgesetz:

$$\boxed{\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = I(A) = \int_A \vec{j}\mathrm{d}\vec{a}}$$

$\int_{\partial A} \vec{B}\mathrm{d}\vec{r} = \mu I(A) = \mu \int_A \vec{j}\mathrm{d}\vec{a} \qquad \mu = \mu_0\mu_r$

Kraft auf $\begin{Bmatrix} ruhende \\ bewegte \end{Bmatrix}$ Testladung $\underset{Lorentzraft}{\overset{el.Kraft}{\Longrightarrow}} \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix}$
Erzeugt durch $\begin{Bmatrix} Ladungsverteilung\ \varrho \\ Stromdichte\ \vec{j} \end{Bmatrix} \underset{Ampere}{\overset{Gau\ss}{\Longrightarrow}} \begin{Bmatrix} \vec{D} \\ \vec{H} \end{Bmatrix}$
Magnetfeld eines unendlich langen Drahtes:
$\vec{H}(\vec{r}) = H_\varphi \vec{e}_\varphi = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$

Kraft zwischen zwei unendlich langen parallelen Drähten mit Abstand d: $\frac{\mathrm{d}F_{12}}{\mathrm{d}z} = -\mu\frac{I_1 I_2}{2\pi d}\vec{e}_{12}$

$H_\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{r}\int_0^r \vec{j}(r')r'\mathrm{d}r'$

1.10 Maxwellsches Durchflutungsgesetz

Integrale Form: $\boxed{\int_{\partial A} \vec{H}\mathrm{d}\vec{r} = \int_A \left(\vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{a}}$

Differentielle Form: $\boxed{\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}}$

Anmerkung: $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ nennt man Verschiebungsstrom.

1.11 Induktion

Auf bewegte Ladung im Magnetfeld wirkt eine Kraft. Diese Kraft erzeugt ein E-Feld, welches eine Spannung induziert.

$$\boxed{\vec{E}_{ind,B} = \frac{\vec{F}_L}{q} = \vec{v} \times \vec{B}}$$

Magnetischer Fluss $\boxed{\Phi(A) = \int_{A(t)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{a}}$

$U_{ind,b} = \int_{\partial A(t)} E_{ind,B} \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(A)}{\mathrm{d}t}$

$U_{ind,r} = \int_{\partial A} E_{ind,r} \mathrm{d}\vec{r} = -\int_A \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{a}$

Bemerkung: Spannungspfeil entgegen der Stromrichtung im Leiter!

$$\boxed{U_{ind} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{A(t)} \vec{B}\mathrm{d}\vec{a} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(A)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\oint\limits_{\partial A} (\vec{v} \times \vec{B})\mathrm{d}\vec{r}}_{\text{Bewegungsinduktion}} - \underbrace{\iint\limits_{A(t)} \frac{\partial B}{\partial t}\mathrm{d}\vec{a}}_{\text{Ruheinduktion}}}$$

Bei homogenen B-Feld und senkrecht zur Fläche: $U_{ind} = -\dot{\Phi} = \dot{A}B + A\dot{B}$

1.12 Vergleiche

Für Punktförmige Ladung/Masse gilt:

Physikalische Größe	Elektrostatik	Gravitation	
Masse	q	m	
Kraft	$\vec{F}_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\lvert q_1 q_2\rvert}{r^2}\vec{e}_r$	$\vec{F}_G = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r$	$r : Abstand$
Feld	$\vec{E} := \frac{\vec{F}_E}{q}$	$\vec{g} := \frac{\vec{F}_G}{m}$	
Potential	$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{r}$	$\Phi_G = \vec{g} \cdot \vec{r}$	

	D-Feld	H-Feld
Durchflutung	$\oiint_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{a} \equiv Q(V)$	$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = I(A)$
Vereinfachung:	$4\pi r^2 D(r) = Q(V)$	$2\pi r H(r) = I(A)$
Materialabhängigkeit:	$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$	$\vec{B} = \mu\vec{H}$
Divergenz	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$
Rotation	$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

1.13 Mathe

1.13.1 Integralsätze:

$$\oiint\limits_{\partial V} \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{a} = \iiint\limits_{V} \mathrm{div}\vec{D}\,\mathrm{d}^3\vec{r} \qquad \oint\limits_{\partial A} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{A} \mathrm{rot}\vec{H}\,\mathrm{d}\vec{a}$$