1 Lineares Gleichungssystem LGS

Das LGS $Ax = b$ kurz $(A|b)$ mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$, $b \in \mathbb{K}^m$ hat m Gleichungen und n Unbekannte.

1.1 Elementare Zeilen/Spaltenumformungen(EZF/ESF)

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat m Zeilen $z_i \in \mathbb{K}^n$ und n Spalten $s_j \in \mathbb{K}^m$

- Vertauschen zweier Zeilen/Spalten
- Multiplikation einer Zeile mit einem$\lambda \neq 0$
- Addition eines λ-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

1.2 Rang einer Matrix

$r = rg =$ Rang (Anzahl der Nichtnullzeilen)

1.3 Lösbarkeitskriterium eines LGS

- genau dann lösbar, wenn: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b))$
- wenn lösbar, $n - \mathrm{rg}(A) =$ Anzahl der frei wählbaren Parameter
- eindeutig lösbar, wenn $rg(A) = n$

1.4 Das homogene LGS

- $(A|0)$ hat stets die triviale Lösung 0
- Summe und Vielfache der Lösungen von $(A|0)$ wieder Lösungen

2 Rechnen mit Matrizen

Die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ hat m Zeilen mit Index i und n Spalten mit Index j

2.1 Rechenregeln

Merke: Zeile vor Spalte! (Multiplikation, Indexreihenfolge, etc...)

1) $A + B = B + A$ 2) (A+B)+C = A+(B+C)
3) $A + 0 = A / A + (-A) = 0$ 4) $(\lambda \cdot \mu)A = \lambda(\mu \cdot A)$
5) $1 \cdot A = A$ 6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ 8) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
9) $A \cdot (B + C) = AB + AC$ 10) $E_n \cdot A = A = A \cdot E_n$

Multiplikation von $A \in \mathbb{K}^{m \times r}$ und $B \in \mathbb{K}^{r \times n}$: $AB \in \mathbb{K}^{m \times n}$
Multiplikation nicht kommutativ! $A \cdot B \neq B \cdot A$

2.2 Transponieren

Falls $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt: $A^\top = (a_{ji}) \in \mathbb{K}^{n \times m}$

1) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$ 2) $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$
3) $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$ 4) $(A^\top)^\top = A$

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist symmetrisch, falls $A = A^\top$ ($\Rightarrow$ diagbar)
$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist schiefsymmetrisch, falls $A = -A^\top$
$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist orthogonal(Spaltenvektoren=OGB), falls:
$AA^\top = E_n \quad A^\top = A^{-1} \quad \det A = \pm 1$
$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist hermitesch, falls $A = \overline{A}^\top$ (kmplx. konj. u. transp.)

2.3 Inverse Matrix

für die inverse Matrix A^{-1} von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt:

1) $A^{-1}A = E_n$ 2) $(A^{-1})^{-1} = A$
3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 4) $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist invertierbar, falls: $\det(A) \neq 0 \quad \vee \quad rg(A) = n$
Berechnen von A^{-1} nach Gauß:
$AA^{-1} = E_n \quad \Rightarrow \quad (A|E_n) \overset{EZF}{\longrightarrow} (E_n|A^{-1})$

2.4 Determinante von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$: $\det(A) = |A|$

- $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$
- obere/untere $\triangle$-Matrix: $\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ (Multiplikation der Koeffizienten der Diagonalen)
- $A = B \cdot C \quad \Rightarrow \quad |A| = |B| \cdot |C|$
- $\det(A) = \det(A^\top)$
- Hat A zwei gleiche Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$
- $|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$ Entwcklng. n. $i$ter Zeile.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Ist A invertierbar, so gilt: $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
- A ist invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$
- Vertauschen von Zeilen/Spalten ändert Vorzeichen von $|A|$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$

Vereinfachung für Spezialfall $A \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2 \times 2} \Rightarrow \det(A) = |A| = ad - bc$

2.5 Rang einer Matrix A

$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit r lin. unabhängige Zeilen und l Nullzeilen:
Rang von A: $\mathrm{rg}(A) = m - l = r$
Zeilenrang (A): Bringe A auf ZSF $\Rightarrow$ Zeilenrang$(A) = rg(A)$
Zeilenraum (A): $Z_A =$ Zeilen ungleich 0
Spaltenrang: Bringe Matrix auf Spaltenstufenform
Kern: $\ker(A) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\} \qquad \dim(\ker(A)) = n - r$
Bild: $A^T \Rightarrow EZF \Rightarrow$ Zeilen ($\neq 0$) bilden die Basis vom Bild. Die (lin. unabhängigen) Spalten von A bilden eine Basis vom Bild.

3 Vektorräume

Eine nichtleere Menge V mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt K-Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.

3.1 Untervektorräume

Eine Teilmenge U eines $K-$Vektorraums V heißt Untervektorraum (UVR) von V, falls gilt:
1) $U \neq \varnothing \quad (0 \in U)$
2) $u + v \in U \quad \forall u, v \in U$
3) $\lambda u \in U \quad \forall u \in U, \forall \lambda \in K$

Wegen (3.) enthält ein UVR U stets den Nullvektor 0. Daher zeigt man (1.) meist, indem man $0 \in U$ nachweist.
Triviale UVR: $U = \{0\}$ mit $B = \emptyset \qquad U = V$ mit $B_U = B_V$

3.2 Lineare Unabhängigkeit

Vektoren heißen linear unabhängig, wenn aus:
$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$ folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_n = 0$

3.3 Basis (Jeder VR besitzt eine Basis!)

Eine Teilmenge B heißt Basis von V, wenn gilt:

- $\langle B \rangle = V$ (B erzeugt V)
- B ist linear unabhängig

3.4 Dimension

$n := |B| \in \mathbb{N}_0$ Dimension von $V \qquad \dim(V) = n$

Mehr als n Vektoren sind stets linear abhängig.
Für jeden UVR $U \subset V$ gilt: $\dim(U) < \dim(V)$

3.5 Orthogonalität I

Skalarprodukt $\langle v, w \rangle$

- Bilinear: $\langle \lambda v + v', w \rangle = \lambda \cdot \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$
- Symmetrisch: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
- Positiv definit: $\langle v, v \rangle \geq 0$

Skalarprodukt bezüglich **symmetrischer, quadratischer** und **positiv definite** Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow \langle v, w \rangle_A = v^T A w$
kanonisches Standardskalarprodukt: $\langle v, w \rangle = v^T w$

Skalarprodukt **Polynomfunktion** $< p(x), q(x) >= \int\limits_0^1 p(x)q(x)\, dx$

In **euklidischem** Vektorraum gilt:
Merke: Nullvektor steht auf allen Vektoren senkrecht.

- **Länge/Norm** von v: $||\vec{v}|| = \sqrt{< \vec{v}, \vec{v} >}$
- **Abstand** von v und w: $d(v, w) = \|v - w\| = \|w - v\|$
- **Winkel**: $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v \cdot w \cdot \cos\phi \qquad \phi = \arccos\left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|}\right)$
- **Orthogonalität** ($v \perp w$): $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$
- **Normierung** auf Länge 1: $\frac{1}{\|v\|} \cdot v$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

Orthogonalsystem: $\forall \langle v, w \rangle \in B$ mit $v \neq w : v \perp w$
Orthogonalbasis: wenn B Orthogonalsystem und Basis
Orthonormalsystem: wenn B Orthogonalsystem und $\|v\| = 1 \quad \forall v \in B$
Orthonormalbasis (ONB): wenn B Orthonormalsystem und Basis

Orthogonale Zerlegung eine Vektors v längs a:
$v = v_a + v_{a^\perp}$ mit $v_a = \frac{\langle v, a \rangle}{\langle a, a \rangle} \cdot a$ und $v_{a^\perp} = v - v_a$

Bestimmen einer **Linearkombination** bzgl. einer ONB:
$$B = \{b_1, \ldots, b_n\} \Rightarrow \lambda_i = \langle v, b_i \rangle$$

Spiegelungsmatrizen: $\forall a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
$$H_a = E_n - \left(\frac{2}{a^\top \cdot a}\right) \cdot aa^\top$$

3.6 Orthogonalität II

Orthonormalisierungsvefahren Gram-Schmidt: aus Basis$\{v_1, \ldots, v_n\}$
1) $b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ (Vektor mit vielen 0en oder 1en)
2) $b_2 = \frac{c_2}{\|c_2\|}$ mit $c_2 = v_2 - \langle v_2, b_1 \rangle \cdot b_1$
3) $b_3 = \frac{c_3}{\|c_3\|}$ mit $c_3 = v_3 - \langle v_3, b_1 \rangle \cdot b_1 - \langle v_3, b_2 \rangle \cdot b_2$

Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b} \qquad (\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}; \vec{b}$ linear unabhängig.)
$\|a \times b\|^2 + |\langle a, b \rangle|^2 = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2 \qquad a \times a = 0$
$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin\left(\measuredangle(\vec{a}; \vec{b})\right) \mathrel{\widehat{=}}$ Fläche des Parallelogramms
Graßmann-Identität: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \equiv \vec{v} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{w}) - \vec{w} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$
Spatprodukt:

- $[a, b, c] := \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \det(a, b, c)$
- $|[a, b, c]| \mathrel{\widehat{=}}$ Volumen des Spates
- $[a, b, c] > 0 \Rightarrow a, b, c$ bilden Rechtssystem
- $[a, b, c] = 0 \Rightarrow a, b, c$ linear unabhängig

Orthogonale Projektion in UVR:
1) Normiere Basis von U nach Gram-Schmidt.
2) $n - r$ linear unabhängige Vektoren, die $\perp$ zu $\{b_1, \ldots, b_r\}$ sind
3)$u = \langle b_1, v \rangle b_1 + \langle b_2, v \rangle b_2 \ldots \Rightarrow u_\perp = v - u$
Abstand von v zu U: $\|u_\perp\|$

Das lineare **Ausgleichsproblem**: (Methode der kleinsten Quadrate)
Experiment: $(t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = 1 \qquad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = x$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) \\ \vdots & \vdots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$A^\top Ax = A^\top b \to$ LGS lösen nach x
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x_1 f_1(x) + \ldots + x_n f_n(x)$

4 QR-Zerlegung einer Matrix

$A = QR \qquad Q^\top Q = E_n$ und $R = (\tilde{R}, 0)^\top$ (Dreiecksmatrix)
1. Spalte $s = (s_1, \ldots, s_n)^\top$ von A kein Vielfaches von e_1
$a = s - \alpha_1 e_1 \neq 0 \begin{cases} s_1 < 0 : \alpha_1 = +\|s\| \\ s_1 \geqslant 0 : \alpha_1 = -\|s\| \end{cases}$
2. Spalte $s = (0, s_2, \ldots, s_n)^\top$ von A kein Vielfaches von e_2
$a = s - \alpha_2 e_2 \neq 0; \begin{cases} s_2 < 0 : \alpha_2 = +\|s\| \\ s_2 \geqslant 0 : \alpha_2 = -\|s\| \end{cases}$
$H_1 = H_a = E_n - \left(\frac{2}{a^\top \cdot a}\right) \cdot aa^\top$ und $A_2 = H_2 H_1 A$
$\to A = QR$ mit $Q = H_1, \ldots, H_r$ und $R = A_r$
$\to x$ durch Rückwärtssubstitution aus $Rx = Q^\top b$ mit $A = QR$

Lösen des **linearen Ausgleichsproblem** mit QR-Zerlegung:
reduzierte QR-Zerlegung von $A \to A = \tilde{Q}\tilde{R} \quad \to \quad \tilde{R}x = \tilde{Q}^\top b$

5 Folgen $(a_n)_n$

explizite Folge: (a_n) mit $a_n = a(n)$
rekursive Folge: (a_n) mit $a_0 = f_0,\ a_{n+1} = a(a_n)$

5.1 Monotonie

Im Wesentlichen gibt es 3 Methoden zum Nachweis der Monotonie:
1) $a_{n+1} - a_n \gtrless (=) 0$ (streng) monoton steigend/ fallend
2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \gtrless (=) 1$ (streng) monoton steigend/ fallend
3) Vollständige Induktion

5.2 Konvergenz

(a_n) ist *Konvergent* mit *Grenzwert* $a : |a_n - a| < \epsilon \forall n \geq \mathbb{N}_0$
Eine Folge konvergiert gegen eine Zahl a: $(a_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$

Es gilt:

- Der Grenzwert a einer Folge (a_n) ist eindeutig.
- Ist (a_n) Konvergent, so ist (a_n) beschränkt
- Ist (a_n) unbeschränkt, so ist (a_n) divergent.
- *Monotoniekriterium*: a_n beschränkt und monoton $\to a_n$ konver.

Regeln für konvergente Folgen $(a_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ und $(b_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} b$:
$(a_n + b_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow}$ a+b $\quad (a_n b_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} ab \quad \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b}$
$(\lambda a_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda a \quad (\sqrt{a_n}) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \sqrt{a} \quad (|a_n|) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} |a|$
$a_n \leqslant b_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a \leqslant b \quad a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} (c_n) \to a$

Grenzwertbestimmung bei rekursiv definierten Folgen:
1. Zeige, dass (a_n) konvergiert durch Beschränktheit und Monotonie
2. Aufstellen und Lösen der Fixpunktgleichung
$\to$ Ersetzen der $a_n + 1, a_n$ durch a in Rekursionsvorschrift
3. Schließe Kandidaten aus, sodass nur einer übrig bleibt

6 Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \text{konv.}$$

Harmonische Reihe — Geometrische Reihe — Alternierende harmonische Reihe

6.1 Konvergenz- und Divergenzkriterien

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert, falls $a_n \not\to 0$ oder
Minorante:$\exists \sum_{n=0}^{\infty} b_n (div) \quad \wedge \quad a_n \geq b_n \ \forall n \geq n_0$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert falls (a_n) monoton fallende Nullfolge
oder Majorante: $\exists \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b \quad \wedge \quad a_n \leq b_n \ \forall n \geq n_0$

Absolute Konvergenz ($\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = a$ konvergiert), falls:
1. Majorante: $\exists \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b \quad \wedge \quad |a_n| \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$
2. Quotienten und Wurzelkriterium:

$$r := \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \qquad \vee \qquad r := \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Falls $\begin{cases} r < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ r > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \\ r = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ keine Aussage möglich} \end{cases}$

Dreiecksungleichung: $\left\|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|$

Cauchyprodukt:
$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{l=0}^{k} a_l b_{n-l})$
mit $c_n = (\sum_{l=0}^{k} a_l b_{n-l})$ UND a,b absolut konvergent
$\to c$ konvergent $(\sum_{n=0}^{\infty} c_n) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$

7 Potenzreihen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - a)^n$

Konvergenz:
$\left| \frac{a_{n+1}(x-a)^{n+1}}{a_n(x-a)^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x - a| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} q \cdot |x - a|$

Falls $\begin{cases} |x - a| < \frac{1}{q} / R & \text{konvergiert absolut} \\ |x - a| > \frac{1}{q} / R & \text{divergiert} \\ |x - a| = \frac{1}{q} / R & \text{keine Aussage möglich} \end{cases}$

Konvergenzradius: $R = \frac{1}{q}$

$R = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$
für R=0 : $K(f)$=$\{a\}$ oder R=∞ : $K(f)$=R
$\to$ ansonsten untersuche f an den Rändern mit Konvergenzkriterien

$\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
arccosh$(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \qquad$ arcsinh$(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
$\tanh = \frac{\sinh}{\cosh} \qquad \coth = \frac{\cosh}{\sinh}$

$$exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

8 Funktionen

Eine Funktion f ist eine Abbildung, die jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Wertemenge W zuordnet.
$f : D \to W,\ x \mapsto f(x) := y$

Verkettung/Komposition: $g \circ f = g(f(x))$
Injektiv: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
Surjektiv: $\forall y \in W \exists x \in D : f(x) = y$
(Alle Werte aus W werden angenommen)
Bijektiv: f ist injektiv und surjektiv $\Rightarrow f$ umkehrbar
Umkehrabbildung: $f(x) = y \to x = g(y) \to y = x$ und $g = f^{-1}$
Identität: $Id_x : X \to X$ $\qquad Id(x) = x$ immer bijektiv

8.1 Grenzwerte und Stetigkeit $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x)$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c, \lim\limits_{x\to a} g(x) = d \to \lim\limits_{x\to a} \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda c + \mu d$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x) || f, g$ stetig $\to f + g, \lambda f, fg, \frac{f}{g}, f \circ g$ stetig
Regel von L'Hospital: (Falls $\exists$ ein Grenzwert)
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \to \left[\frac{0}{0}\right] / \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
Satz von Maximum und Minimum: $\exists$ Stellen $x_{max}, x_{min} \in [a, b]$: $f_{min} = f(x_{min}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{max}) = f_{max}$
Zwischenwertsatz: $\forall y \in [f(a), f(b)]\ \exists x \in [a, b] : f(x) = y$
Nullstellensatz: ist $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder umgekehrt) so gilt: $\exists \hat{x}[a, b] : f(\hat{x}) = 0$
Fixpunktsatz: $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig $\to \exists \hat{x} : f(\hat{x}) = \hat{x}$

9 Differentiation

f diffbar, falls f stetig und $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x)$ exist.
f differenzierbar $\to f$ stetig $\qquad f$ stetig $\not\to f$ differenzierbar
Tangentengleichung: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Mittelwertsatz: Falls f diffbar, dann $\exists x_0 : f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

9.1 Anwendungen der Differentiation

Numerische Differentiation (Erhalten der Werte der Ableitungsfkt.)
$f' \approx \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h} \qquad f'' \approx \frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{h}$

Newton-Verfahren: mit $tol > 0$ und gesuchter Nullstelle $x*$
Solange $|x_{n+1} - x_n| \leqslant tol$ und $|f(x_{n+1})| \leqslant |f(x_n)|$:
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit Startwert x_0

Taylorpolynom: $\quad T_{m,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$

Taylorreihe: $\quad T_{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)$
Restglied: $R_{m+1}(x) = f(x) - T_{m,f,a(x)}$
Bestimmung von Taylorreihen: Taylorformel $\vee$ bekannte Taylorreihen differenzieren bzw. integrieren $\vee$ bekannte Taylorreihen einsetzen $\vee$ Koeffizientenvergleich

Polynom- und Splineinterpolation
(bei $n + 1$ Stützstellen $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$)

- **Lagrange'sche Interpolationsformel**:
  $f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_l}{x_i-x_j}$
- **Interpolationspolynom nach Newton**:
  $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$
  1) Ansatz: $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \lambda_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$
  2) Bestimme $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ mit $f(x_i) = y_i$
  3) λ_i einsetzen in 1) $\to$ Erhalten der a_i
- **Bestimmung der kubischen Splineinterpolation**:
  s an den Stützstellen $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ durch n Polynome:
  $s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$
  Koeffizientenbestimmung: $c_0 = 0 = c_n$
  restliche c_i aus LGS mit $h_i = x_{i+1} - x_i$
  wobei $r_i = 3\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}\right); i = 1, \ldots, n - 1$
  $a_i = y_i \quad b_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{2c_i+c_{i+1}}{3} \quad d_i = \frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}$

10 Integration I (Flächenbestimmung)

f stetig$\to$integrierbar $\qquad$ f integrierbar$\to |f|$ integrierbar

10.1 Integrationsregeln:

- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$
- $\int \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int g(x)\,\mathrm{d}x$
- $|\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$
- $f(x) \leqslant g(x) \to \int f(x) \leqslant \int g(x)$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

10.2 Integrationsmethoden

- Anstarren + Göttliche Eingebung
- Partielle Integration: $\int uv' = uv - \int u'v$
- Substitution: $\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int f(t)\,\mathrm{d}t$
- Logarithmische Integration: $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \ln|g(x)|$

11 Integration II

11.1 numerische Integration

näherungsweise Bestimmung eines bestimmten Integrals:
1) Unterteile das Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle $[x_i, x_i + 1]$
2) Ersetze f auf jedem Teilintervall durch einfach zu integrierende Fkt.
3) Erhalte den Näherungswert: $\int f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_i(x)dx$

11.2 Besondere Regeln

Newton-Cotes-Formel: äquidistante Teilintervalle Breite h
$h = \frac{(b-a)}{n} \qquad x_i = a + ih$
Trapezregel: (Grad 1)
$T(h) = h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right)$
Simpsonregel:
$S(h) = \frac{h}{6}(f(x_0) + 4f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + 4f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) + f(x_n))$

11.3 Rotationskörper

Volumen: $V = \pi \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x$
Oberfläche: $O = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$

11.4 unbestimmtes Integral

$\int\limits_{\text{ok}}^{\text{böse}} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\text{böse}} \int\limits_{\text{ok}}^{b} f(x)\mathrm{d}x$
Majoranten-Kriterium: $|f(x)| \leq g(x)$ und $\int_a^\infty g(x)dx$
$\to \int_a^\infty f(x)dx \qquad$ existiert dann auch
Cauchy-Hauptwert: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{-b}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

12 Differentialgleichungen

12.1 Separierbare DGL: $\dot{x}(t) = f(t)g(x)$

1) Separation: $\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$
2) Integration: $\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt + c$
3) Auflösen nach $x = x(t)$
4) Lösung für $g(x) = 0$?? $\to$ Überprüfen

12.2 Lineare DGL 1. Ordnung: $\dot{x}(t) + a(t)x(t) = s(t)$

1) homogene Lösung der separierbaren DGL $\dot{x}(t) + a(t)x(t) = 0$
$\to x_h(t) = ce^{-\int a(t)dt}$
2) Variation der Konstanten
$\to$ partikuläre Lösung $x_p(t) = c(t)e^{-\int a(t)dt}$
$\to$ in inhomogene DGL einsetzen $\to c(t)$ und $x_p(t)$
3) Allgemeine Lösung: $x_a = x_p + x_h$

12.3 Lineare homogene DGL mit konst. Koeffizienten:
$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = 0$

1) Charakteristische Gleichung: Ersetze $x^{(n)}$ durch $\lambda^n \to a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$
2) Bestimme Lösungen der charakteristischen Gleichung
3) n-linear unabhängige Lösungen $\{x_1, \ldots, x_n\}$:
· doppelte Nst mit $m = m_i$ wähle: $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda t}$
· komplexe Nst $\lambda = a + ib = \lambda_i$ mit $m = m_i$
$\to$ streiche $\bar{\lambda} : e^{at}cos(bt), e^{at}sin(bt)$
4) n linear unabhängige Lösungen
$\to$ allgemeine Lösung $x_h(t) = c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t)$

Wronski-Determinante: $W(t) = det($Matrix der Lösungen$) \neq 0$
Entscheidung ob die Lösungen unabhänging sind

12.4 Inhomogene lin. DGL mit konst. Koeffizienten
$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{x} + a_0 x = s(t)$

1) Bestimme Lösungsmenge L_0 der zugehörigen homogenen DGL
2) partikuläre Lösung mit VdK oder Ansatz vom Typ der rechten Seite
3) $L = x_p + L_0$

- VdK für $n = 2 : a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = s(t)$:
  1) Ansatz: $x_p = c_1(t)x_1 + c_2(t)x_2$
  2) Erhalte $\dot{c}_1, \dot{c}_2$ aus:
  $\dot{c}_1x_1 + \dot{c}_2x_2 = 0$ und $\dot{c}_1\dot{x}_1 + \dot{c}_2\dot{x}_2 = \frac{s(t)}{a_2}$
  3) Integration von $\dot{c}_1, \dot{c}_2 \to c_1$ und $c_2 \to$
  Lösung $x_p = c_1x_1 + c_2x_2$
- Ansatz vom Typ der rechten Seite: „x_p ist vom Typ $s(t)$"
  für $s(t) = (b_0 + b_1t + \ldots + b_mt^m)e^{at}cos(bt)$ oder
  $s(t) = (b_0 + b_1t + \ldots + b_mt^m)e^{at}sin(bt)$:
  $x_p(t) = [(A_0 + \ldots + A_mt^m)cos(bt) + (B_0 + \ldots + B_mt^m)sin(bt)]e^{at}$ für $p(a + ib) \neq 0$
  $x_p(t) = t^r[(A_0 + \ldots + A_mt^m)cos(bt) + (B_0 + \ldots + B_mt^m)sin(bt)]e^{at}$ für $a + ib \qquad r$-fache Nst

12.5 Die (euler-)homogene DGL: $\dot{x} = \phi\left(\frac{x}{t}\right)$

1) Substitution: $z = \frac{x}{t} \to$ separierbare DGL $\dot{z} = \frac{1}{t}(\phi(z) - z)$
2) Lösen der separierbaren DGL: $\int \frac{dz}{\phi(z)-z} = \ln|t| + c \to$ auflösen nach $z(t)$
3) Rücksubstitution

12.6 Eulersche DGL: $a_2t\ddot{x} + a_1t\dot{x} + a_0x = s(t)$

1) charakteristische Gleichung: $p(\alpha) = a_2\alpha(\alpha - 1) + a_1\alpha + a_0 = 0$
2) Faktorisiere: $p(\alpha)$
3) Erhalte n unabhängige Lösungen: $x_h(t) = c_1x_1 + c_2x_2$:
· einfache Nst: t^α
· doppelte Nst: $t^\alpha, t^\alpha \ln t$
· komplexe Nst: $a + ib = \alpha = \alpha_i \to t^\alpha sin(b\ln(t)), t^\alpha cos(b\ln(t))$
4) Bestimme durch VdK die partikuläre Lösung

12.7 Bernoulli'sche DGL: $\dot{x} = a(t)x(t) + b(t)x^\alpha(t); \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$

1) durch Substitution $z(t) = [x(t)]^{1-\alpha} \to \frac{1}{1-\alpha}\dot{z} = az + b$
2) Löse diese lineare DGL 1. Ordnung $\to z(t)$
3) Rücksubstitution: $x(t) = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$
4) AWP und AB liefert c

12.8 Potenzreihenansatz:
$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x(n - 1) + \ldots + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = s(t)$

1) Entwickeln aller Funktionen $a_0(t), \ldots, a_{n-1}(t), s(t)$ in Taylorreihen um a :
$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{a_{n-1}}(t-a)^k x^{(n-1)} + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{a_0}(t-a)^k x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^s(t - a)^k$
2) setze die $x(t)$ in die DGL ein
3) Zusammenfassung gleicher Koeffizienten vor Potenzen durch Indexverschiebung
4) Koeffizientenvergleich

12.9 Numerik gew. DGL / AWP: $\dot{x} = f(x, t)$ mit $x(t_0) = x_0$

Unterteilen des Intervalls $[t_0, t]$ in Stützstellen $t_k = t_0 + kh$
mit Schrittweite $h = \frac{t-t_0}{n}$
expliziter Euler: $x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k)$
impliziterEuler: $x_{k+1} = x_k + hf(t_{k+1}, x_{k+1})$
Mittelpunktsregel: $x_{k+1} = x_k + hf\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}, \frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$
2-stufige RKV: $x_{k+1} = x_k + hf(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}f(t_k, x_k))$
4-stufige (klassische) RKV: $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(_k1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
mit $k_1 = f(t_k, x_k) \qquad k_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}k_1)$
$k_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2}k_2) \qquad k_4 = f(t_k + h, x_k + hk_3)$

13 Allgemeines

13.1 Vollständige Induktion

Behauptung: $f(n) = g(n)$ für $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$
IA: $n = n_0$: $\quad$ Zeige $f(n_0) = g(n_0)$ =wahr.
IV: Behauptung gilt für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ $\quad$ (Sei $f(n)$ =wahr)
IS: $n \to n + 1$: $\quad$ Zeige $f(n + 1) = \underbrace{f(n)}_{=wahr} \ldots = g(n + 1)$

13.2 Werte von π

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	`	0	`	0

13.3 Besondere Ableitungen und Integrationen

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$ln\|f(x)\|$	$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{x^3}}{3}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x\ln(x) - x$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x	e^x
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x\ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln\|\cos(x)\|$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln\|\sin(x)\|$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left\|1+x^2\right\|$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$