Logik

1. Einführung

1.1. Was ist Logik?

Formalisierung von sprachlicher Aussagen. Regeln des Denkens. Schlussfolgerungen. Klassifizierung in wahr und falsch. Widerspruch, Paradoxon, Konsistenz. Axiome
Für eine Theorie möglichst einfache Grundlagen (Axiome) aufstellen.

Früher: Philosophie, aristotalisch-scholastisch
Heute: formal, analytische Phylosophie, Informatik

1. Mengenlehre, Grundlagen Mathematik
2. Modelltheorie
3. Berechenbarkeitstheorie
4. Beweistheorie, Kalkül, Herleitung

1.2. Bedeutsame Personen

Platon	428 – 348 v.Ch	Ideenlehre
Aristoteles	384 – 322 v.Ch.	Syllogistik, Prädikatenlogik
Euklid	325 – 265 v.Ch.	Axiomatik
Scholastik	14. Jhd.	Regeln des Denkens
G. Leibniz	1646 – 1716	Universalsprache, Kalkül
G. Boole	1815 – 1864	Boolsche Algebra
R. Dedekind	1831 – 1916	Natürliche Zahlen
C. Peirce	1839 – 1914	Quantenlogik
G. Cantor	1845 – 1925	Unendlichkeit, Mengenlehre
G. Frege	1848 –1925	Prädikatenlogik
D. Hilbert	1862 – 1925	Hilbertsches Programm
F. Hausdorff	1869 – 1942	Mengenlehre
E. Zermelo	1871 – 1953	Grundlagenaxiomatik
J. Luhasiewicz	1878 – 1956	Mehrwertige Logik
B. Russell	1872 – 1970	Russell Antimonie
A. Tarski	1902 – 1983	Modellbegriff
K. Gödel	1902 – 1983	Gödelschen Sätze
G. Gentzen	1909 - 1945	Kalkül des nat. Schließens
A. Turing	1912 – 1954	Turing-Maschinen

2. Aussagenlogik

Die Sprache der Aussagenlogik besteht aus

1.	Aussagenvariablen	$A_0, A_1, \ldots$	
2.	Das Falsum	$\perp$	
3.	Junktoren	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$	
	$\neg$	Nicht	Negation
	$\wedge$	Und	Konjunktion
	$\vee$	oder (auch)	Disjunktion
	$\rightarrow$	impliziert	Implikator
	$\leftrightarrow$	genau dann, wenn	Äquivalenz
4.	Klammersymbole	(,)	

Wir bilden Zeichenketten, z.B. $A_0 \wedge$ Die Formeln der Aussagenlogik sind gegeben durch

- Jede Aussagenvariable A_n ist eine Formel
- Das Falsum $\perp \leftrightarrow f$ ist eine Formel
- Sind A, B Formeln, so auch $\neg A$, $(A \wedge B)$ ...
- Jede Formel besitzt einen Wahrheitswert w, f

2.1. Wahrheitstafel

Vorteil: mechanisch, einfach   Nachteil: Feinheiten nicht ersichtlich, wächst exponentiell

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

2.2. Tautologien (Immer wahr)

Indirektes Beweisen	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
Kontrapositionsgesetz	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
Spezialfall	$(A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow (B \rightarrow \neg A)$
Ausgeschlossenen Dritten	$A \vee \neg A$
Stabilität	$A \leftrightarrow \neg\neg A$
ex falso quod libet	$\perp \rightarrow A$
modus pomens	$A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$
modus tolens	$\neg B \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$
Fallunterscheidung	$A \leftrightarrow ((\neg B \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow A)$
De Morgan	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
	$\neg A \leftrightarrow (A \rightarrow \perp)$
	$A \rightarrow B \rightarrow C \leftrightarrow A \wedge B \rightarrow C$

Rabe $\rightarrow$ schwarz $\leftrightarrow$ nicht schwarz $\rightarrow$ nicht Rabe.

Bindungsstärken absteigend: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
$A \wedge B \wedge C$ ist $(A \wedge B) \wedge C$
$A \vee B \vee C$ ist $(A \vee B) \vee C$
$A \rightarrow B \rightarrow C$ ist $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

2.3. Rückführung von Junktoren

2.3.1 Sprache mit $\wedge, \neg$

$\perp$	$A \wedge \neg A$
$A \vee B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$
$A \rightarrow B$	$\neg(A \wedge \neg B)$
$A \leftrightarrow B$	$\neg(\neg(A \wedge B) \wedge \neg B)$

2.3.2 Sprache mit $\wedge, \perp, \rightarrow$

$\neg A$	$A \rightarrow \perp$
$A \vee B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$
$A \leftrightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2.3.3 Sprache nur mit NAND |

$\neg A$	$A \vert A$	
$A \wedge B$	$\neg(A \vert B)$	$(A \vert B) \vert (A \vert B)$
$A \vee B$	$\neg A \vert \neg B$	$(A \vert A) \vert (B \vert B)$
$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$A \vert (B \vert B)$

2.4. Natürliches Schließen (Gentzen Kalkül)

Vorteil: Zeigt Struktur des Gedankens, Unterscheidung zwischen Kalkülen, Erweiterung auf Prädikatenlogik möglich
Sprache: $\rightarrow, \wedge, \perp$ Aussagen: $A_m, (A \wedge B), \perp, (A \rightarrow B)$
Beispiel Beweisbaum:

$$\dfrac{A \rightarrow (A \wedge B) \qquad [A]}{\dfrac{\dfrac{A \wedge B}{B}}{A \rightarrow B}}$$

Beweis für $A \rightarrow B$ unter der Annahme $A \rightarrow (A \wedge B)$
$[A]$ ist eine gebundene Annahme

2.5. Kalküle

2.5.1 Der Kalkül K_m der Minimallogik

Schlussregeln	Beseitigungsregel	Einführungsregel
$\wedge$	$\dfrac{A \wedge B}{A}, \dfrac{A \wedge B}{B}$	$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B}$ $(\wedge^+)$
$\rightarrow$	$\dfrac{A \rightarrow B \quad A}{B}$	$\dfrac{A}{B \rightarrow A}$ $(\rightarrow^+_{[B]})$
$\vee^*$	$\dfrac{A \vee^* B \quad [A][B]}{C}$	$\dfrac{A}{A \vee^* B}, \dfrac{B}{A \vee^* B}$

Tipps: von unten nach oben. Beweis mit vielen $\rightarrow$ kann viele Argumente binden. Falsum anstreben, da $\frac{\perp}{\neg A}(\rightarrow^+_A)$
Regel: An jedem Knoten des Beweisbaumes steht eine Teilformel aus der Vorraussetzung oder der Schlussfolgerung.

2.5.2 Der Kalkül K_i der intuitionisten Logik

K_i hat alle Regeln von K_m und $\frac{\perp}{A_m}$ (ex falso quodlibet)
Daraus folgt: $\frac{\neg A \quad A}{\perp}$

2.5.3 Der Kalkül K_c der klassischen Logik

K_c hat alle Regeln von K_i und $\frac{\neg\neg A_m}{A_m}$ (Stabilität),
Daraus folgt $\frac{(A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp}{A}$

2.6. Begriffe

Ein mit den Reglen eines Klakül K gebildeter Baum T heißt ein K-Beweis oder K-Beweisbaum oder eine K-Herleitung. An der Wurzel des Baumes T steht die bewiesene Aussage. An den Blättern von T stehen die Annahmen von T. Annahmen können frei oder gebunden sein. Eine Annahme A an einem Blatt s heißt gebunden, falls unterhalb von s eine Anwednung der Regel $\rightarrow^+_A$ erfolgt, andernfalls ist sie frei. Ist Γ eine Menge von Aussagen und A eine Aussage, so schreiben wir $\Gamma \vdash_K A$ „A ist in K beweisbar mit Annahme in Γ“ falls ein K-Beweisbaum T mit Wurzel A existiert, dessen freien Annahmen aus Γ sind

2.6.1 Beispiele

1. $A \vdash_m A$ Beweisbaum: A
2. $\vdash_m A \rightarrow A$ Beweisbaum: $\frac{[A]}{A \rightarrow A}(\rightarrow^+_A)$
3. $A \rightarrow B \rightarrow C \vdash_m A \wedge B \rightarrow C$
4. $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B \vdash_m \neg\neg(A \rightarrow B)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \rightarrow (B \rightarrow C) \quad (\rightarrow^-_A) \quad \dfrac{[A \wedge B]}{A}(\wedge^-)}{(B \rightarrow C) \quad (\rightarrow^-_B)} \quad \dfrac{[A \wedge B]}{B}(\wedge^-)}{C \quad (\rightarrow^+)}}{(A \wedge B) \rightarrow B}$$

2.7. Fragen/Diskussion

Es gibt Suchalgorithmen für K_m, K_i, K_c, allerdings nciht für Prädikatenlogik! Wie kann man zeigen, das etwas in K_m, K_i, K_c nicht beweisbar ist? Konstruktion von sogenannten Modellen. Modellbegriff hängt vom Kalkül ab. K_c genügt um *alle* Tautologien zu beweisen!
Was wollen K_m, K_i, K_c ?
K_c: Es gilt $\vdash_c A$ genau dann, wenn A Tautologie
K_m: $\perp$ beliebige Aussagenvariable ohne Bedeutung einer falschen Aussage
K_i: Ziel ist konstruktive Logik. Modellbegriff schwierig.

2.8. Brower-Hoyting-Kolmogorov (BHK)

1. Wahrheit ist Beweisbarkeit
2. $\perp$ ist nicht beweisbar
3. Ein Beweis von A und B liegt vor, wenn sowohl ein Beweis von A als auch ein Beweis von B vorliegt.
4. Ein Beweis von $A \rightarrow B$ liegt vor, wenn ein Verfahren existiert, dass jeden Beweis von A in einen Beweis von B übersetzt.

Bemerkung: 2. und 3. gelten für K_c, 1. und 4. nicht
$A \rightarrow \neg\neg A$ ist in BHK begründbar, $\neg\neg A \rightarrow A$ dagegen nicht.

Reductio ad absurdum:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]}{\perp}}{\neg A \rightarrow \perp}}{A} \tag{1}$$

2.9. Konstruktives Oder

$\vdash_m A \vee \neg A$ für alle A
Konstruktiv wird $A \vee \neg A$ wie $\neg\neg A \rightarrow A$
Konstruktiv wir „oder“ nicht durch $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ definiert, sondern es gibt einen neuen Junktor $\vee^*$ mit folgenden Regeln:
BHK-Interpretation für $\vee^*$:
Ein Beweis von $A \vee^* B$ liegt vor, wenn eine Beweis von A oder ein Beweis von B vorliegt.
Bemerkung: Aus (Stab) folgt (efq), denn: $\dfrac{\dfrac{\perp}{\neg A \rightarrow \perp}}{A}$

2.10. Äquivalenzsatz (nur Ausblick)

Gilt $\vdash_m A \leftrightarrow B$, so darf man in jeder Aussage C die Teilaussage A durch B ersetzen: Ist D die so entstehende Aussage, so gilt $\vdash_m C \leftrightarrow D$. Analog für $\vdash_i$ und $\vdash_c$ Interessant ist, dass $\vdash_m$ feiner ist als $\vdash_c$

A heißt *negativ*, falls jede Aussagenvariable A_m von A nur in der Form $\neg A_m$ vorkommt. Ist A negativ gilt Stabilität.

2.10.1 Gödel-Gentzen Übersetzung

A^G erhält man, wenn man in A alle A_m durch $\neg\neg A_m$ ersetzt. $\Sigma^G = \{A^G \mid A \in \varepsilon\}$ Beispiel: Falls $A = A_0 \wedge \neg A_1$ und $A^G = \neg\neg A_0 \wedge \neg\neg\neg A_1$, dann gilt $\vdash_c A \leftrightarrow A^G$
Einbettungssatz für alle A, Σ: $\Sigma \vdash_c A$ genau dann, wenn $\Sigma^G \vdash_m A^G$

3. Modelle der klassischen Logik

Ab jetzt $\vdash = \vdash_c$

3.1. Modellbegriff von Tarski ($\models$)

„Ein Modell entscheidet für jede Aussage ob sie gilt oder nicht“
In einem Modell soll z.B. $A_0 \rightarrow (A_4 \vee A_5)$ entweder gültig oder ungültig sein soll.
Ein Modell der klassischen Aussagenlogik ist eine Menge M von natürlichen Zahlen.
$m \in M$ bedeutet A_m ist gültig/wahr im Modell M
$m \notin M$ bedeutet, A_m ist ungültig/falsch im Modell M
Wir belegen jedes A_m mit wahr oder falsch bzw. 1 oder 0
Damit ist $M = \{m \mid A_m \text{hat den Wert } 1\}$

3.1.1 Gültigkeit in einem Modell

Sei M ein Modell. Wir definierten $M \models A$. In M gilt A, M ist ein Modell von A, M erfüllt A, A ist wahr in M. $M \models A \wedge B$ genau dann, wenn $M \models A$ und $M \models B$.
M enthält sozusagen die wahren/gültigen Aussagenvariablen. Variablen, die nicht Teil der Menge sind, sind ungültig/falsch

3.1.2 Zusammenhang mit Wahrheitstafeln

Es gilt $M \models A$ genau dann, wenn die durch M definierte Zeile der Wahrheitstafel von A den Wert w als Ergebnis hat.

3.1.3 Eigenschaften von $\models$

Entweder $M \models A$ oder $M \not\models A$
Entweder $M \models A$ oder $M \models \neg A$
$M \models A \vee B$ genau dann, wenn $M \models A$ oder $M \models B$
$M \models \neg A$ genau dann, wenn $M \not\models A$
$M \models A \leftrightarrow B$ genau dann, wenn $M \models A$ genau dann, wenn $M \models B$

A heißt erfüllbar, falls $\exists M : M \models A$
A heißt allgemeingültig, falls $\forall M : M \models A$

A ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg A$ nicht allgemeingültig ist
A ist genau dann allgemeingültig, wenn A eine Tautologie ist.

3.2. Gödelscher Vollständigkeitssatz (VS)

$\Sigma \vdash_c A$ genau dann, wenn $\Sigma \models A$

Verbindet Semantik mit Syntaktik. Gilt nicht für $\vdash_m$ oder $\vdash_i$
Wenn es einen Beweisbaum für A gibt, ist A auch semantisch richtig.
Wenn A semantisch als richtig gitl, gibt es einen Beweisbaum dafür.

$\Sigma \vdash_c A$: Für jedes Modell M von Σ gibt es einen gültigen Beweisbaum für A
$\Sigma \models A$: Jedes Modell M von Σ ist ein Modell von A
$\vdash_c A$ genau dann, wenn A eine Tautologie ist.

Σ heißt widerspruchsfrei, falls $\Sigma \nvdash_c \bot$, andernfalls heißt Σ widerspruchsvoll.
Beispiel $\Sigma = \{A_4, \neg A_4\}$ ist widerspruchsvoll.

Äquivalent sind $\Sigma \nvdash_c A \leftrightarrow \Sigma, \neg A$ ist widerspruchsfrei.
Ist $\Sigma, \neg A$ widerspruchsvoll, so $\Sigma, \neg A \vdash_c \bot$, also $\Sigma \vdash \neg A \to \bot \equiv \neg\neg A$, also $\Sigma \vdash A$

3.3. Korrektheitssatz (KS)

„Man kann in K_c keinen Unfug beweisen"
Umformulierung des VS: $\Sigma \vdash_c A \to \Sigma \models A$
Um zu zeigen, dass $\Sigma \nvdash_c A$ genügt es *ein* M zu finden mit $M \models \Sigma \wedge M \not\models \neg A$

3.4. Erfüllbarkeitssatz (ES)

„Jede widerspruchsfreie Theorie Σ hat ein Modell M":
Ist Σ widerspruchsfrei, so existiert ein M mit $M \models \Sigma$
ES $\to$ VS: Es gelte $\Sigma \models A$. Annahme $\Sigma \nvdash_c A$. Also ist $\Sigma, \neg A$ widerspruchsfrei. Also existiert ein M mit $M \models \Sigma$ und $M \models \neg A$. Also gilt $\Sigma \not\models A$

Ziel ist also: Gegeben: Σ ist widerspruchsfrei. Konstruiere ein Modell von Σ

1. Erweitere Σ zu einer maximal widerspruchsfreien Theorie Θ (füge mehrere A oder $\neg A$ hinzu)
2. Setze $M = \{n \mid A_n \in \Theta\}$. Dann gilt $M \models \Theta$, also $M \models \Sigma$

Man kann diese Argumentation zum "Design" eines Kalküls verwenden: Sammel Schlussregeln so dass das Argument durchgeht.

Zusammenfassung: $\boxed{\vdash = \models}$

3.5. Gödelscher Unvollständigkeitssatz

Wenn eine Theorie widerspruchsfrei ist, dann lässt sich die Aussage, dass die Theorie widerspruchsfrei ist nicht mit der Theorie beweisen.

3.6. Kompaktheitssatz (KS)

„Keine Folgerung benutzt unendlich viele Thesen"

1. Es gelte $\Sigma \models A$. Dann gibt es ein endliches $\Theta \subseteq \Sigma$ mit $\Theta \models A$
2. Sei Σ eine Menge von Aussagen und jedes endliche $\Theta \subseteq \Sigma$ hat ein Modell, dann ist Σ erfüllbar

$\Sigma \models \Theta$ bedeutet: Jedes Modell M von Σ ist auch ein Modell von Θ

Theorie $\mathrm{Th}(\Sigma)$: Menge von Aussagen die aus Σ folgen. $M \models \Sigma \leftrightarrow M \models \mathrm{Th}(\Sigma)$

$M \models \Sigma$ bedeutet $M \models A$ für alle $A \in \Sigma$

4. Beispiele zur Aussagenlogik (Modelle)

Beispiel für Menge von Aussagen: $\Sigma = \{A_{2m} \to A_{2(m+1)} \mid m \in \mathbb{N}\} = A_0 \to A_2, A_2 \to A_4, A_4 \to A_6, \ldots$
Beispiel für Modelle M von Σ: $M = \{5, 6, 7, 8, \ldots\}$ oder $M = \{2m \mid m \in \mathbb{N}\}$ oder $M = \emptyset$
Allgemein: M enthält beliebige ungerade Zahlen, für jede gerade Zahl muss auch jede größere gerade Zahl enthalten sein.
$M = \{1, 3, 4\} = \{A_1, A_3, A_4\}$ ist kein Modell, da $M \not\models A_4 \to A_6$

Beispiele für $\mathrm{Th}(\Sigma) = \{A \mid \Sigma \models A\} = \{A \mid \Sigma \vdash A\}$
Was ist drin? $A_0 \to A_{100}$, $A_4 \to A_4$
Nicht in $\mathrm{Th}(\Sigma)$: $A_3 \to A_5$ $\quad M = \{3\}$
Warum gilt $A_0 \to A_4 \in \mathrm{Th}(\Sigma)$? 1. Beweisbaum 2. Modelle: Es gilt $M \models A_0, M \models A_2$ und damit $M \models A_4$

Modell: Eine bestimmte Realisierung von Elementaraussagen
Theorie: Beliebige syntaktische Folgerungen aus Elementaraussagen (kann auch $A_2 \to \neg A_2$ sein)

5. Prädikatenlogik (erster Stufe)

English: First Order Logic. Formale Sprache L mit Quantoren.

Grundzeichen: $\wedge, \to, \bot, \forall, =, (,), ,$
Variablen $V_0, V_1, V_2, \ldots$
Zusätzlich zu den Grundzeichen:
Relationssymbole $R, \overline{R}, S, T, U$
Funktionssymbole f, g, h
Konstantensymbole $\mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}$

Reine Logik: $L = \emptyset$

Wir definieren „sinnvolle" Zeichenketten:
Terme:

- Jedes Variablensymbol ist ein Term
- Jedes Konstantensymbol ist ein Term
- Ist f ein m-stelliges Funktionssymbol und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, so ist $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

Primformeln (atomic formula)

- $\bot$ ist eine Primformel
- Sind t_1, t_2 Terme, so ist $t_1 = t_2$ eine Primformel
- Ist R ein m-stelliges Relationssymbol und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, so ist $R(t_1, \ldots, t_n)$ eine Primformel

Keine Primformel: $R(R(x, y), y)$

Formeln:

- Jede Primformel ist eine Formel
- Sind A und B Formeln, so auch $A \vee B$ und $A \to B$
- Ist A ein Formel und x eine Variable, so ist $\forall x A$ eine Formel

Merke: Ohne Klammer ist der Wirkungsbereich des Allquantors so klein wie möglich!
Variablen können in Formeln frei oder gebunden vorkommen.
Beispiel $\forall x \left(\underset{\text{frei}}{y} = \underset{\text{geb}}{x} \to f(\underset{\text{geb}}{x}) \right) \wedge \underset{\text{frei}}{x} = z$
Hat eine Formel keine freien Variablen, so heißt sie eine Aussage.
Eine Axiomatik ist eine endlich oder effektiv unendliche, gegebene Menge oder Liste von L-Aussagen.
Abkürzungen:
$\neg A : A \to \bot$
$A \vee B : \neg(\neg A \wedge \neg B)$
$A \leftrightarrow B : A \to B \wedge B \to A$
$\exists x A : \neg \forall x \neg A$
Klammern: Wie in Aussagenlogik
Bsp: $x = y$ ist $A(x, y)$ oder $A(x, y, z)$ aber nicht $A(x, z)$

5.1. Genzenkalkül für Prädikatenlogik K_c

$\dfrac{A}{\forall x A}$ $\forall^+ x$ falls x keine freie Annahme im Baum darüber ist

$\dfrac{\forall x A}{A_x(t)}$ $\forall^- t$

$A_x(t)$ bedeutet: „substituiere x mit t für jede Stelle, an der x frei von A vorkommt.

Semantische Begründung von $\forall^+ und \forall^-$: Hat man $A(x)$ bewieson ohne über x irgendwas vorrauszusetzen (x ist beliebig), so hat man $\forall x A(x)$ bewiesen. Hat man $\forall x A(x)$ bewiesen, so hat man allgemein $A(t)$ für jeden Term t

Beispiel
$A = (\forall x f(x) \neq x) \wedge x = y + 1$
$A_x(g(z)) = (\forall x f(x) \neq x) \wedge g(z) = y + 1$

5.2. Beispiele für Axiomensysteme

$\forall x (x = y)$
$\forall x, y (x = y \to y = x)$
$\forall x, y, z (x = y \wedge y = z \to x = z)$
$\forall x, y (x = y \to f(x) = f(y))$
$\forall x, y (x = y \to R(x) \leftrightarrow R(y))$

5.3. Abstraktion Äquivalenzrelation

Umgangssprache unterscheidet „das gleiche" und „das selbe"
Formalisierung: $\sim$ zweistellige Relation $x \sim y$ (ähnlich)
Axiome:
$\forall x (x \sim x)$
$\forall x, y (x \sim y \to y \sim x)$
$\forall x, y, z (x \sim y \wedge y \sim z \to x \sim z)$

5.4. Abstraktion Ordnungen

Punkte die auf einer Line links rechts geordnet sind.
Relation: $<$ Axiome:
$\neg \exists x (x < x)$
$\forall x, y, z (x < y \wedge y < z \to x < z)$
$\forall x, y (x < y \vee x = y \vee y < x)$

5.5. Boolsche Algebren

Welt: $A, \neg A$
Sprache: $+, \cdot, \overline{}, 0, 1$
Axiome:

	$(0, 1; \cdot, +, \overline{x})$
Kommutativ	$x \cdot y = y \cdot x$
	$x + y = y + x$
Assoziativ	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
	$x + (y + z) = (x + y) + z$
Distributiv	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
Indempotenz	$x \cdot x = x$
	$x + x = x$
Absorbtion	$x \cdot (x + y) = x$
	$x + (x \cdot y) = x$
Neutralität	$x \cdot 1 = x$
	$x + 0 = x$
Dominant	$x \cdot 0 = 0$
	$x + 1 = 1$
Komplement	$x \cdot \overline{x} = 0$
	$x + \overline{x} = 1$

5.6. Supertheorien

Zwei erfolgreiche Axiomensysteme: 1. Zahlentheorie: Dedekind-Peano-Arithmetik
2. Mengenlehre: Zermelo-Fraenkel-Axiomatik

5.7. Dedekind-Peano-Arithmetik (PA)

Sprache: $+, \cdot, S, 0$ $\quad S$ ist der Nachfolger
Axiome: (Elementare Arithmetik)
Q1: $\forall x (Sx \neq 0)$
Q2: $\forall x, y Sx = Sy \to x = y$
Q3: $\forall x (x \neq 0 \to \exists y (x = Sy))$
Q4: $\forall x (x + 0 = x)$
Q5: $\forall x, y (x + S(y) = S(x + y)$
Q6: $\forall x (x \cdot 0 = 0)$
Q7: $\forall x, y (x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$

Kleinste Theorie die nicht entscheidbar ist (Gödel). Falls man Q7 weglässt ist sie entscheidbar.
Weitere Axiome:
Induktionsaxiom: $A(0) \wedge \forall x (A(x) \to A(S(x))) \to \forall x (A)$
PA ist sehr stark, man kann Logik foramlisieren. Es gilt dann:
Ist PA widerspruchsfrei, so gilt PA $\nvdash$ Con(PA) (zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz)

6. Mengenlehre

Arten: Naiv, Cantorsche Mengenlehre, Axiomatische Mengenlehre
Namen: „Mengen, Mangifaltigkeit, Vielheit, Inbegriff, System“
Vorläufer: Geometrische Mengen, einfache Zahlenmengen
Begründer: Cantor, Dedekind, Riemann, Bolzano

Grundideen:
Extensionalität: Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die selben Elemente haben. $\{a, b\} = \{b, a\}$
Komprehension: Ist $\epsilon(x)$ eine Eigenschaft, so ist die Menge $M = \{x \mid \epsilon(x)\}$
Naive Mengenlehre: Die Bildung von $\{x \mid \epsilon(x)\}$ ist immer erlaubt.
Die naive Mengenlehre ist widerspruchsvoll!

6.1. Russel-Zermelo-Paradoxie

Betrachte $\epsilon(x) = x \notin x$
Sei $R = \{x \mid x \notin x\}$
Frage: Gilt $R \in R$ oder $R \notin R$?
Es gilt $x \in R \leftrightarrow x \notin x$
Speziell für $x = R$ folgt: $R \in R \leftrightarrow R \notin R$
Dies ist eine rein logische Parodoxie und hat nichts mit Mengen zu tun.

Antworten:
1. ingorieren/abwarten (Hausdorf)
2. Logik ändern
3. Typentheorie (Russel)
4. Mengentheoretische Axiome (Zermelo)

1904: Wohlordnungssatz bewiesen
1908: Axiomatik, in der Wohlordungssatz beweisbar ist
Beispeile: Es gibt $\{\}$, $\forall a, b \exists \{a, b\}$, Vereinigungsmenge, Potenzmenge, Auswahlaxiom (AC)

Auswahlaxiom (AC): ist M eine Menge von unendlich vielen, paarweise disjunkten, nichtleeren Mengen, so gibt es eine Menge N (Auswahlmenge), die aus jedem Elemente von M genau ein Element auswählt.
5. Alternative Ansaätze: Quine (New Foundation), Topologische Mengentheorie.

6.2. Cantorsche Kontinuumshypothese (CH)

„Es gibt keine Mächtigkeit zwischen $|\mathbb{N}|$ und $|\mathbb{R}|$“
$|\mathbb{N}|$: Unendlich abzählbar $\quad$ $|\mathbb{R}|$: Unendlich überabzählbar.
Sei M eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$.
Dann gilt entweder $|M| = |\mathbb{N}|$ oder $|M| = |\mathbb{R}|$

6.3. ZFC = Zermelo-Frenkel-Axiomatik mit AC

formalisiert in der Prädikatenlogik erster Stufe mit der Sprache $L = \{\epsilon\}$
1. ZFC $\vdash$ Con(PA), dh ZFC beweist Zahlentheorie als widerspruchsfrei. (Gödel VS)
2. ZFC $\nvdash$ Con(ZFC), außer es gilt ZFC $\vdash \bot$ (Gödel II)
3. Sei (CH) die Kontinuumshypothese. Dann gilt: Ist ZFC widerspruchsfrei, so gilt ZFC $\nvdash$ CH und ZFC $\nvdash \neg$ CH
4. Ist ZF widerspruchsfrei, so auch ZFC (Gödel: Konsistenz Auswahlaxiom)

7. Wiederholung

7.1. Die großen Sätze der Mathematik / Grenzen der Logik

Zwei starke Grundlagentheorien:

PA: Peano Arithmetik = Q + Induktionsarithmetik mit Robinson Arithmetik Q
$L_{\text{PA}} = \{0, S, +, \cdot\}$
ZFC: Zermelo-Frenkel Arithmetik der Mengenlehre mit Auswahlaxiom C
$L_{\text{ZFC}} = \{\in\}$
ZF: Zermelo-Frenkel Arithmetik ohne Auswahlaxiom C
ZFC—ZF ist viel stärker als PA
Die reine Logik (Logizismus) ist nicht entscheidbar!
Q ist die kleinste Arithmetik die nicht entscheidbar ist (kein Wahrheitstafelverfahren)
Wenn bei PA die multiplikation weggelassen wird, gelten die Gödelschen Sätze nicht mehr!

7.2. Erster Gödelscher Unvollständigkeitssatz (in der Verschärfung von Rosser)

Sei PA widerspruchsfrei (d.h. PA $\nvdash \bot$), dann gibt es eine Aussage A mit PA $\nvdash A$ und PA $\nvdash \neg A$

1. Gödel: A besagt: „Ich bin nicht beweisbar“
Rosser: A besagt: „Zu jedem Beweis von mir gibt es einen kürzeren Beweis meiner Negation“
2. Im Standardmodell von PA (0,1,2,3, . . .) ist A wahr/gültig
3. Analoges gilt für ZF und ZFC und für alle hinreichend starken Theorien.
4. Eine Aussage B heißt unabhängig von einer Axiomatik Σ falls $\Sigma \nvdash B$ und $\Sigma \nvdash \neg B$
A wie im Satz von Gödel ist also eine unabhängig von PA
Σ heißt unvollständig, fall es eine unabhängiges B gibt. 1. UVS besagt also PA ist unvollständig (falls PA widerspruchsfrei)

7.3. Zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz

Sei PA widerspruchsfrei. Dann gilt PA $\nvdash \mathrm{Con}(PA)$
Wobei $\mathrm{Con}(PA)$ die in PA formalisierte Aussage „Pa ist widerspruchsfrei” ist.

1. Analoges gilt wieder für alle hinreichend starken Theorien.
2. Das Ergebnis widerlegt das Hilbert-Programm.
Hilbert wollte $\mathrm{Con}(PA)$ in einer schwachen Theorei beweisen.
3. ZFC $\vdash \mathrm{Con}(\text{PA})$
4. ZFC $\nvdash \mathrm{Con}(\text{ZFC})$ und ZF $\nvdash \mathrm{Con}(\text{ZF})$
5. ZF $\vdash \mathrm{Con}(\text{ZF}) \to \mathrm{Con}(\text{ZFC})$
relative Konsistenz des Auswahlaxioms (Gödel 1938)
Die hinzunahme des Auswahlaxioms führt also nicht zu Widersprüchen!
6. ZFC $\nvdash$ CH und ZFC $\nvdash \neg$CH

7.4. Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik (Chruch, Turing)

Sei $L = \{0, +, \cdot, S\}$ und $\Sigma \models \{A \mid A$ ist eine beweisbare L-Aussage$\}$
Dann ist Σ unentscheidbar, d.h. es gibt kein effektives Verfahren (Turing-Maschine), das von einer beliebige vorgegeben Aussage A entscheidet, ob A in Σ ist oder nicht.
Kurz: Kein Wahrheitstafelverfahren für die Arithmetik

7.5. Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Es gibt kein Programm, das andere Programme überprüfen kann, ob sie terminieren oder nicht.

7.6. Undefinierbarkeit der Wahrheit

In $L = \{+, \cdot, S, 0\}$: Es gibt keine Formel $true(n)$ mit der Eigenschaft: Für alle n gilt $true(n)$ genau dann, wenn die n-te Aussage der Sprache im Standardmodell $\mathbb{N}$ wahr ist.

7.7. Gödelscher Vollständigkeitssatz (VS)

In der Prädikatenlogik (jede Sprache) gilt: $\Sigma \vdash A$ genau dann, wenn $\Sigma \models A$
In der Mengenlehre wurde bewiesen: Jede widerspruchsfreie Theorie besitzt ein Modell (Erfüllbarkeitssätze)

Was ist ein Modell in der Prädikatenlogik?
Kurze (ungenaue) Antwort:
$\mathfrak{M} = (M, f^M, g^M, \ldots, R^M, S^M, T^M, \ldots, c^M, d^M, e^M, \ldots)$
M: nichleere Menge: Träger oder Universum
f^M Funktion von M^k nach M
R^M Relation/Teilmenge von M^k mit k ist Stellenzahl
c^M bestimmte konstante Elemente von M

$M \models A$ bedeutet: A ist richtig, falls alle Symbole von A durch ihre Interpretationen in M ersetzt werden und die Quantoren über M laufen, d.h. $\forall x$ ist $\forall x \in M$ und $\exists x$ ist $\exists x \in M$

Beispiel: $L = \{+, 1, 0\}$
$(\mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}) \models \neg\exists x : x + 1 = 0$
Beispiel 2: $\mathbb{R} \models \exists x : x^2 = 2$

Eine widerspruchsvolle Theorie beweist alles!
Man kann rekursiv alle beweisbaren Aussagen einer Theorie auflisten

8. Übungsaufgaben

8.1. Türen

Sie sind ein Wanderer und kommen zu zwei Türen und zwischen den beiden Türen sitzt ein Zwerg. Entweder dieser Zwerg lügt oder sagt die Wahrheit. Eine Tür führt zu Gold die andere zur Ziege. Man darf den Zwerg eine Ja/Nein Frage stellen. *Lösung:* Wenn du deine Antwort invertieren würdest, welche Tür würdest du mir empfehlen?
Lügst du genau dann, wenn der Schatz links ist?

8.2. Glühbirne

Sie wohnen im 100. Stock mit 3 Schaltern und ein Schalter schaltet im Keller eine Glühbrine. Sie müssen mit einmal runtergehen feststellen welcher Schalter, die Lampe schaltet.
Lösung: Ein Schalter für 5min an, dann aus, zweiter Schalter an, runter laufen: an, aus, aus & warm.

8.3. Umgangssprache

Hunde und Katzen dürfen nicht an Board: Nur wenn jemand beide Tiere besitzt.
Hunde oder Katzen dürfen nicht an Board Analysieren sie die beiden Aussagen mit Aussagenlogik

8.4. Beweisbäume

1. $\vdash_m A \to \neg\neg A$
2. $(A \to B) \wedge \neg B \vdash_m \neg A$
3. $A \wedge B \to C \vdash_m A \to (B \to C)$
4. $\vdash_m (A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$

1.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \qquad (A\to\bot)}{\bot}}{(A\to\bot)\to\bot}}{A\to((A\to\bot)\to\bot)}$$
2.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A] \quad [B]}{A\wedge B}\to C}{C}}{B\to C}}{A\to(B\to C)}$$

8.5. Kalkülaufgaben

1. $\vdash_m \neg\neg\neg A \to \neg A$
2. $\vdash_m A \to B \to (\neg B \to \neg A)$
3. $\neg\neg B \to B \vdash_m (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

optional: Wikipedia über Luitzen Brower und Streit mit Hilbert

8.6. Konstruktives Oder

$\vdash_m A \vee \neg A$ für alle A

8.7. Deduktionstheorem

Für alle Σ, A, B sind äquivalent: (zeige mit Beweisbaum)
$\Sigma, A \vdash_m B$ genau dann, wenn $\Gamma \vdash_m A \to B$
Analog für $\vdash_i$ und $\vdash_c$

8.8. Übung für 11.12.

$\Gamma, A \models B$ genau dann, wenn $\Gamma \models A \to B$
Σ, Θ sind äquivalent, falls $\Sigma \models \Theta$ und $\Theta \models \Sigma$
Dann sind äquivalent:

- Σ, Θ sind äquivalent
- $\mathrm{Th}(\Sigma) = \mathrm{Th}(\Theta)$, wobei $\mathrm{Th}(\Gamma) = \{A \mid \Gamma \models A\}$
- Σ und Θ haben dieselben Modelle

8.9. Weihnachtsaufgabe

1. Der Butler oder der Gärtner hat den Lord umgebracht, oder der Lord hat Selbstmord begangen
2. Man bringt nur die um, die man hasst und vor denen man Angst hat
3. Die, die der Lord hasst, mag der Gärtner
4. Die, die der Lord hasst, hasst auch der Butler
5. Der Lord hasst sich selbst und den Gärtner
6. Der Butler hasst alle, die Angst vor dem Lord haben
7. Jeder mag den Lord, den Butler oder den Gärtner

Formalisierung in der Prädikatenlogik:
Menschen x, y, Butler b, Gärtner g, Lord l, x killt y: $K(x, y)$, hat Angst $A(x, y)$, hasst $H(x, y)$, mag $\neg H(x, y)$

1. $K(b, l) \vee K(g, l) \vee K(l, l)$
2. $\forall x, y : K(x, y) \to H(x, y) \wedge A(x, y)$
3. $\forall x : H(l, x) \to \neg H(g, x)$
4. $\forall x : H(l, x) \to H(b, x)$
5. $H(l, l) \wedge H(l, g)$
6. $\forall x(A(x, l) \to H(b, x))$
7. $\forall x(\neg H(x, l) \vee \neg H(x, b) \vee \neg H(x, g))$

8.10. Prädikatenlogik

$\exists x A(x) : \neg\forall x \neg A(x)$
Herleiten im K_c:
1. $A \to \exists x A$
2. $\exists x A \wedge \forall x(A \to B) \to B$ wobei x nicht frei in B

1.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(A\to\bot)]}{A\to\bot} \qquad A}{\bot}}{\forall x(A \to\bot) \to\bot}$$
2.
$$\dfrac{\dfrac{\forall x(A \to\bot) \to\bot \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \quad \dfrac{\forall x(A\to B)}{A\to B}}{B} \qquad B\to\bot}{\dfrac{\bot}{A\to\bot}}}{\forall x(A\to\bot)}}{\dfrac{\bot}{B\to\bot\to\bot}}}{B}$$