Mathematik I für EI (PD Dr. Karpfinger)

Mitschrift von Martin Zellner und Johannes Schäfer

2. August 2011

Fehler bitte an Martin.Zellner@gmail.com melden.

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen

Unter einer *Menge* verstehen wir eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte, die wir Elemente dieser Menge nennen.

$A = \{a, b, c\}$ a, b, c sind Elemente.

Zwei Schreibweisen

1. Angabe der Menge durch explizite Angabe ihrer Elemente: $A = \{a, b, c\}, N = \{1, 2, 3, ...\}$
2. Angabe der Menge durch Eigenschaften, die ihre Elemente haben: $A := \{n \in N | 1 \leq n \leq 5\}(= \{1, 2, 3, 4, 5\}$ — = für die gilt: "mit der Eigenschaft"

Selbsterklärende bzw. bekannte Notationen

1. $a \in A : a$ a Element von A
2. $a \notin A : a$ ist kein Element von A
3. $A \subseteq B : A$ ist Teilmenge von B : $\forall a \in A : a \in B$
4. $A \nsubseteq B : A$ ist keine Teilmenge von B $\exists\ a \in A : a \notin B$
5. $A \subsetneq B$: A ist echte Teilmenge von B : $A \subseteq B\ \exists\ b \in B$: $b \notin A$
6. $A = B$ Gleichheit von Mengen: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
7. $\emptyset$: leere Menge, Menge ohne Elemente $\emptyset = \{n \in N \mid n < -1\}$
8. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ Durchschnitt
9. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ Vereinigung
10. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ Mengendifferenz
11. $C_B(A) = B \setminus A,\ A \subseteq B$ Komplement von A in B
12. $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ das Kartesische Produkt
13. $|A|$ $(= \#A = card(A))$ Anzahl der Elemente, Kardinalität

Beispiele $A = \{1, 2, 5, 7\}$
$B = \{n \in N \mid n \text{ ist ungerade }\} = 2N - 1 = \{2k - 1 \mid k \in N\}$
$C = \{B, 2, \sqrt{2}\}$
$D = \{1, 5, 7\}$

Es gilt:

$$D \subseteq A \tag{1}$$
$$D \subseteq A \tag{2}$$
$$D \subseteq B \tag{3}$$
$$C \not\subseteq B \tag{4}$$
$$B \not\subseteq C \tag{5}$$
$$B \in C \tag{6}$$
$$A \cap D = D => D \subseteq A \tag{7}$$
$$C_A D = \{2\} \tag{8}$$
$$B \setminus C = B \tag{9}$$
$$C \times D = \Big\{(B,1),(B,5),(B,7),(2,1),(2,5),(2,7),(\sqrt{2},1),(\sqrt{2},1),(\sqrt{2},7)\Big\} \tag{10}$$
$$|C \times D| = 9(= |C| * |D|) \tag{11}$$

Ein "Satz" ist eine (beweisbare) wahre Aussage:

Für alle Mengen A, B, C gilt:

1. $\emptyset \subseteq B$
2. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Beweis:
(a) Angenommen es gibt eine Menge B mit $\emptyset \not\subseteq B$
$\exists \in \emptyset, a \notin B$ Wiederspruch $\rightarrow \nexists\ B\ mit\ \emptyset \not\subseteq B\ \forall$

(b) "$\subseteq$": D.h. wir zeigen: $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
$a \in A \setminus (B \cup C) \rightarrow a \in A \wedge a \notin (B \cup C)$
$\rightarrow a \in A \wedge (a \notin B \wedge a \notin C)$
$\rightarrow a \in A \setminus B \wedge a \in A \setminus C \rightarrow a \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

"$\subseteq$"
$a \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
$\Rightarrow (A \in A \wedge A \notin B) \wedge ((A \in A) \wedge (A \notin C))$
$\Rightarrow a \in A \wedge a \notin B \cup C \Rightarrow a \in A \setminus (B \cup C)$

(c) "klar"

(d) $a \in A \vee (a \in B \wedge a \in C)$

$\Rightarrow (a \in A \wedge a \in B) \vee (a \in A \wedge a \in C)$
$\Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

2.1 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Es ist $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$, Wir setzen $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, Die natürlichen Zahlen sind *angeordnet*, d.h.:

1. $m \leq n\ od. n \leq m \sqrt{n}, m \in \mathbb{N}$
2. $n \leq m \in n \leq n \Rightarrow m = n4$
3. $m \leq n.n \leq k \Rightarrow m \leq k$

2.2 Vollständige Induktion

Das ist eine Beweismethode, mit der man oftmals gültige Aussagen für alle $n \in N$ (d.h. $\forall n > n_0$) zeigen kann.

Bsp: Beweise, dass die Formel
$(*) 1 + 2 + 3 + \ldots (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{z}$
für alle $n \in N$ gültig ist.
Gauß:
$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 + n$
$s = n + n - 1 + n - 2 + \ldots + 2 + 1$
$n + 1 + n + 1 + n + 1 + \ldots + n + 1 = n(n+1)$

Nun mit vollständiger Induktion:
(1) $n = 1 : li.S. = 1,\ re.S. = 1 \Rightarrow (*)$stimmt für $n = 1$.
(2) Wir nehmen an, dass (*) für ein $n \in N$ gilt.
(3) Wir zeigen: (*) gilt auch für $n + 1$
$\Rightarrow$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

Wir zeigen (3): $1 + 2 + 3 + \ldots + n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+1)}{2}$
Wir schreiben: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$
Wir haben gezeigt: $\sum_{i=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{n}$ Gaußsche Summenformel

Nächstes Bsp:
$$\forall q \in Rin \forall n \in N_0 : \sum_{i=0}^{n} q^i = \begin{cases} n+1, & \text{falls } q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{falls } q \neq 1 \end{cases}$$ "geometrische Summenformel"
Beachte: $\sum_{i=}^{n} q^i = q^0 + q^1 + q^2 + \ldots + q^n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$
$n = 0 : \sum_{i=0}^{0} q^i = 1$

Wir zeigen durch vollständige Induktion:

1. Fall: $q = 1 : \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + 1 + 1 = n + 1 \quad \surd$
2. Fall: $q \neq 1 :$
   (a) gilt für $n = 1$:
   linke Seite: $\sum_{i=0}^{1} q^i = 1 + q$
   rechte Seite: $\frac{1-q^2}{1-q} = 1 + q$

(b) WIr nehmen an, das (*) für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

(c) Wir zeigen: (*) gilt auch für $n+1$, d.h.:
$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \Leftarrow$ das ist zu zeigen
$\sum_{i=0}^{n+1} a^i = \sum_{i=0}^{n} q^i + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1}$
$= \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q}$
$= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} = \sum_{i=0}^{n+1} a^i$

Man nennt:

1. den Induktionsanfang (IA)
2. die Induktionsbehauptung (IB)
3. den Induktionsschluss (IS)

Beispiel: Zeige dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
Die Zahl $a_1 := 5^n - 1 \in \mathbb{N}$ ist ein Vielfaches von 4

IA: $a_1 = 5^1 - 1 = 4$ ist ein Vielfaches von 4
IB: a_n ist ein Vielfaches von 4
IS: $a_{n+1} = 5^{n+1} - 1 = 5^n * 5 - 1 = (4+1)5^n - 1 = 4 * 5^n + 5^n - 1 \overset{IA}{=} 4 * 5^n + 4k = 4(5^n + k)$ ist ein Vielfaches von 4.
Das nächste Beispiel braucht Vorbereitungen:

Fakultät Für $n \in \mathbb{N}$ schreibt man:
$n! := n(n-1)(1-2) : 2 * 1$
$0! := 1$
Bsp: $1! = 1;\ 2! = 2 * 1;\ 3! = 3 * 2 * 1;\ 4! = 4 * 3 * 2 * 1$

Binomialkoeffizienten Für $k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n$ setzt man:
$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\binom{n}{k} := 0k < 0$

Es gilt:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
2. $\binom{n}{k} = 1 = \binom{n}{0}$
3. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Nun zum Beispiel: $\forall\ a, b \in \mathbb{R}, \forall\ n \in \mathbb{N}_0 : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Binomialformel: $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$

Beispiele:

1. $n = 0:$
   linke Seite$(a+b)^0 = 1$
   rechte Seite $\sum_{k=0} 0\binom{0}{k}a^n b^{0-k} = \binom{0}{0}a^0 b^{0-0} = 1$

2. $n = 1$
   linke Seite:$(a+b)^1 = a+b$
   rechte Seite: $\sum_{k=0}^{0}\binom{1}{k}a^k b^{1-k} = \binom{1}{0}a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1}a^1 b^{1+1} = b+a$

3. $n = 2:$
   linke Seite: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   rechte Seite: $\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}a^k b^{2-k} = \binom{2}{0}a^0 b^{2-0} + \binom{2}{1}a^1 b^{2-1} + \binom{2}{2}a^2 b^{2-2} = b^2 + 2ab + a^2$

2.3 Die ganzen Zahlen

Mathematiker "konstruieren" die ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen.
Wunsch: $a + x = b(5 + x = 2)$ soll lösbar sein für alle $a, b \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$

2.4 Die rationalen Zahlen

Wunsch: $ax = b$ soll lösbar sein für alle $a, b \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ Man konstruiert aus $\mathbb{Z}$ die Menge $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der rationalen Zahlen.
Hier gilt:

1. $\frac{m}{n} = \frac{k}{l} \rightleftarrows m * l = n * k$

2. $\frac{m}{n} = \frac{m*k}{n*k}$

2.5 Dezimaldarstellung

Jede rationale Zahl $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ hat ein Dezimaldarstellung.

$$\frac{m}{n}\begin{cases} a, a_1 a_2 a_n & \text{endlich} \\ a_1, a_1 a_2 a_n \overline{b_1 b_2} & \text{periodisch} \end{cases}$$

Die Dezimaldarstellung von $\frac{m}{n}$ findet man durch Division von m durch n.

Wie findet man die Bruchdarstellung $\frac{m}{n}$ aus der Dezimaldarstellung?

1. $1,125 = \frac{1125}{1000} = \frac{225}{200} = \frac{45}{40} = \frac{3}{8}$

2. $0,\overline{36} =: a \to 100a - a = 36 \Rightarrow a(100-1) = 36 \Rightarrow a = \frac{36}{99} = \frac{12}{33}$

3. $0,25\overline{54} =: a \to 10000a - 100a = 2554 - 25 \Rightarrow a(9900) = 2529$
   $\Rightarrow a = \frac{2529}{9900} = \frac{281}{1100}$

Wichtig war:

1. vollständige Induktion

2. Periodische Dezimalzahl $\to$ Bruch

3 Die reelen Zahlen $\mathbb{R}$

Mit $\mathbb{R}$ bezeichnet man die Menge der reelen Zahlen.
$\mathbb{R}$ = Menge aller möglichen Dezimalzahlen. ($\rightarrow \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, es gilt sogar $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$):

$\sqrt{2}$ ist nicht rational, also irrational

angenommen, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}, etwa \sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

Wir kürzen: $\sqrt{2} = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}, p$ und q sind teilerfremd. Damit: $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2q^2 = p^2$ ist gerade. $\Rightarrow p$ ist gerade.
$\Rightarrow p = 2r \Rightarrow p^2 = 4r^2 \Rightarrow 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow 2r^2 = q^2 \Rightarrow q^2$ist gerade $\Rightarrow q$ ist gerade. $\Rightarrow$Wiederspruch. Also: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ ist "vollständig", d.h. $\mathbb{R}$ ist eine Zahlengerade "ohne Lücken".

1. Jede reelle Zahl ist ein Punkt auf der Zahlengerade.
2. Jeder Punkt auf der Zahlengerade ist eine reelle Zahl.
   $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = Menge der irrationalen Zahlen.

3.1 n-te Wurzeln:

In $\mathbb{R}$ gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}, \forall\ a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: Es gibt genau ein $x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : x^n =$
Dieses x nennt man die n-te Wurzel aus $a, x = \sqrt[n]{a}$, im Fall $n = 2 : \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$
Es gilt:

1. $a \in R_{>0}, n$ gerade $\Rightarrow x^n = a$hat genau 2 Lösungen: $\pm \sqrt[n]{a}$
2. $a \in R_{>0}$, n ist ungerade $\Rightarrow x^n = a$ hat genau eine Lösung: $\sqrt[n]{a}$
3. $a \in \mathbb{R}_{<0}$, n gerade $\Rightarrow x^n = a$ hat keine Lösung
4. $a \in \mathbb{R}_{<0}$, n ungerade $\Rightarrow x^n = a$ hat genau eine Lösung: $-\sqrt[n]{-a}$
5. $a = 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x^n = a$ hat genau eine Lösung: 0

3.2 Der Betrag

$$a \in \mathbb{R} \rightarrow |a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls a } < 0 \end{cases}$$

Beachte: $|a| = \sqrt{a}^2 \forall\ a \in \mathbb{R}$

Regeln für den Betrag:

1. $\forall\ a \in \mathbb{R} : |a| \geq 0$
2. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a - b| =$ Abstand zwischen a und b auf der Zahlengeraden.
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |ab| = |a| * |b|$
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

3.3 Intervalle:

Bekannt:

Für $a, b \in \mathbb{R}, a \in b:$
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, (a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
$]a, b[:= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}, [a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
$[a, \infty) = [a, \infty] = \{x \in | x \geq a\}, (a, \infty) =]a; \infty[$
$= \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}, (-\infty, a) =] - \infty, [= \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$

Vorsicht: $\pm\infty$ sind keine Zahle, es sind Symbole.

3.4 Ungleichungen

Beachte

1. Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl, dreht das $\leq$ Zeichen um.
2. Beim Invertieren aufpassen: $2 < 3 \to \frac{1}{2} > \frac{1}{3}, -3 < -2 \to \frac{-1}{3} > \frac{-1}{2}, -2 < 3 \to \frac{-1}{2} < \frac{1}{3}$

Beim Lösen von Ungleichungen bestimmt man die Menge aller x, die die Ungleichung erfüllen.

Beispiele:

1. $3x - 7 \leq x + 2 \Leftrightarrow 2x \leq 9 \Leftrightarrow y \leq \frac{9}{2} \to L = (-\infty, \frac{9}{2})$
2. $x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) > 0 \Leftrightarrow (x > 3 \wedge x > 1) \vee (x < 3 \wedge x < 1) \Leftrightarrow x \in (3, \infty) \cup (-\infty, 1)$
3. $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2-x}{x(x+2)} = \frac{2}{x(x+2)} \leq 0 \Rightarrow x(x+2) < 0$
   $\Rightarrow (x < 0 \wedge x > -2) \vee (x > 0 \wedge x < -2)$
   $\Leftrightarrow x \in (-2; 0) \vee x \in \emptyset \Rightarrow L = (-2, 0)$
4. Weitere Beispiele

3.5 Maximum, Minimum, Supremum, Infimum

"klar" sind die Begriffe Maximum und Minimum einer Teilmenge μ von $\mathbb{R}$:

1. $\mu = \{1, 2\} \to \max \mu = 2, \min \mu = 1$
2. $\mu = \{1, \infty) \to \nexists \max \mu, \min \mu = 1$
3. $\mu = (1, 2) \to \nexists \max \mu, \nexists \min \mu$

Eine Teilmenge μ von $\mathbb{R}$ heißt:

1. nach unten beschränkt, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $a \leq x \forall x \in \mu$

2. nach oben beschränkt, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq a \; \forall x \in \mu$

3. beschränkt, falls es oben und unten beschränkt ist.

Beispiel:

1. $(-\infty, 2)$: keine untere Schranke, ABER durch $2, 4, \ldots$ nach oben beschränkt.

2. $(-12, 38]$: nur nach unten beschränkt ($-12, -13$ sind untere Schranken) und nicht nach oben beschränkt.

Es gilt:

1. Jede nach oben beschränkte nicht leere Teilmenge u von $\mathbb{R}$ hat eine kleinste obere Schranke, μ, das Supremum von $\mu(\sup a)$

2. Jede nach unten beschränkte nicht leere Teilmenge u von $\mathbb{R}$ hat eine kleinste untere Schranke, μ, das Infinum von $\mu(\inf a)$

Beispiele:

1. ...

Beachte:

1. Falls es in M ein Maximum gibt: $\max x\mu = \sup \mu$

2. Falls es in M ein Minimum gibt: $\min x\mu = \inf \mu$

Beispiele: $D = \{\frac{n^2}{2^n} | n \in \mathbb{N}\}$ hat $\sup D = \frac{9}{8} \inf D = 0$

4 Trigonometrische Funktionen

4.1 Sinus und Kosinus

Gegeben ist ein Kreis mit Radius 1.

$$\pi = 3,14159265358979\ldots \quad \text{(Kreiszahl)} \tag{12}$$

Das Bogenmaß gibt den Winkel φ durch die Länge des Kreisbogenstückes des Einheitskreises an, das duch den Winkel φ ausgeschnitten wird.

$\rightarrow$ *Skizze*

Wir erklären zwei Funktionen sin **und** cos

$$\text{Zu} x \in \mathbb{R} \begin{cases} \cos x \\ \sin x \end{cases} \tag{13}$$

$\rightarrow$ *Skizze*

- x positiv gegen den Uhrzeigersinn

- x negativ $\rightarrow$ im Uhrzeigersinn

Wir haben für alle $x \in \mathbb{R}$ die Zahlen $\sin x$ und $\cos x$ erklärt: Das sind Abbildungen (Funktionen):

$$\sin : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \sin x \end{cases} \quad \sin x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \tag{14}$$

$$\cos : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \cos x \end{cases} \quad \cos x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \tag{15}$$

Einige Werte:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3/2\pi$	2π
sin	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1	0	1

(16)

Wichtige Eigenschaften:

- Die Graphen von sin und cos $\rightarrow$ *Skizze*

- Die 2π Periodizität:

  Für alle $x \in \mathbb{R}$:
  $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$
  $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$
  Für alle $k \in \mathbb{Z}$

- Die Nullstellen:
  $\sin(k\pi) = 0 \forall k \in \mathbb{Z} \to \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \pi\mathbb{Z}$
  $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) \to \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \pi\mathbb{Z}$
- Die Symetrie: $\forall x \in \mathbb{R}$:
  $\sin(-x) = -\sin(x)$ ungerade Funktionen
  $\cos(-x) = \cos(x)$ gerade Funktionen
- Die Beschränktheit: $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$
- Pythagoras: $\forall x \in \mathbb{R} : \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Die Verschiebung: $\forall x \in \mathbb{R} : \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x), \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$

4.2 Die Additionstheoreme

$\forall x, b \in \mathbb{R}$:

- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Folgerungen: $\forall x, b \in \mathbb{R}$

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x (b = x$ im 1. Additionstheorem)
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
- $\sin^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$
- $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

4.3 Tangens und Kotangens

Mit sin und cos definieren wir zwei weitere Funktionen tan und cot:

$$\tan : \begin{cases} \mathbb{R}/\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ x \to \tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \end{cases} \quad \tan x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \tag{17}$$

$$\cot : \begin{cases} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \\ x \to \cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \end{cases} \quad \cot x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} \tag{18}$$

Wichtige Eigenschaften:

- Die Graphen: $\to Skizze$
- Die π Periodizität: $\forall x \in Def(\tan)$ bzw. $\forall x \in Def.(\cot)$:
  $\tan(x + \pi) = \tan(x)$ in $\cot(x + \pi) = \cot(x)$ (siehe Additionstheoreme)
- Die Nullstellen:
  $\tan x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \to \pi\mathbb{Z} =$ Nullstellenmengevon tan
  $\cot x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \to \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} =$ Nullstellenmenge cot
- Die Symmetrie: $\forall x \in Def(\tan), Def(\cot) : \tan(-x) = -\tan x, \cot(-x) = -\cot(x) \to$ Ungerade Funktion

Zwei (für die Integration) wichtige Formeln:

$$\forall x \in (-\pi, \pi) : \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \text{ in } \sin x = \frac{2\tan(\frac{2}{x})}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \tag{19}$$

4.4 Die Umkehrfunktion zu sin, cos, tan, cot

Wir betrachten sin auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
Wir stellen fest:

$$\forall x \in [-1, 1] \exists_1 \wedge x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : \sin x = y \tag{20}$$

Hierdurch ist eine Abbildung (Funktion) erklärt:

$$\arcsin : \begin{cases} [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{]} \\ y \to \text{das x mit } \sin x = y \end{cases} \tag{21}$$

Einige Werte: $\arcsin 0 = 0, \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \dots$

- Graph (arcsin): $\to$ *Skizze*

Es gilt:

- $\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Umkehrfunktion
- $\sin(\arcsin y) = y \quad \forall y \in [-1, 1]$ Umkehrfunktion

Analog: Betrachte $\cos a$ für $[0, \pi]$:

$$\forall y \in [-1, 1] \exists_1 x \in [0, \pi] : \cos x = y \tag{22}$$

$$\arccos : \begin{cases} [-1, 1] \to [0, \pi] \\ y \to \cos x \text{ mit } \cos x = y \end{cases} \tag{23}$$

Analog:

$$a - \cot : \begin{cases} \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ b \to x \text{ mit } \tan x = y \end{cases} \tag{24}$$

Hier ist das Skript noch unvollständig.

5 Komplexe Zahlen - Kartesische Koordinaten

Viele Polynome über $\mathbb{R}$ haben keine Nullstelle in $\mathbb{R}$, z.B. $x^2+, x^2+x+1, \ldots$ (d.h. die Gleichungen $x^2+1=0, x^2+x+1=0, \ldots$ haben keine Lösungen)
Wir konstruieren eine Zahlenmenge $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ in:

Jedes nicht konstante Polynom über $\mathbb{C}$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$

Das ist der Fundamentalsatz der Algebra.
Betrachte die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{R}\}$

Wir definieren Addition und Multiplikation von Elemente aus $\mathbb{R}^2$:

Für $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}$:

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d) \tag{25}$$

$$(a,b) * (c,d) := (ac - bd, ad + bc) \tag{26}$$

Beispiel:

- (2, 1) + (-1, 7) = (1, 8)
- (2, 1) * (1, 7) = (-9, 13)
- (0,1) * (0,1) = (-1, 0)
- (a, 0) * (c, 0) = (ac, 0)

Es gelten:

- Die Assoziativgesetze: $[(a,b)\binom{+}{*}(c,d)] = (e,f) = (a,b) \pm [(c,d) \pm (e,f)]$
- Die Kommutativgesetze: $(a,b)\binom{+}{*}(c,d)\binom{+}{*}(a,b)$
- Das Distributivgesetz: $(a,b) * [(c,d) + (e,f)] = (a,b) * (c,d) + (a,b) * (e,f)$
- Es gibt ein Einselement: $(1,0)$ erfüllt: $(1,0) * (c,d) = (c,d)\ \forall (c,d) \in \mathbb{R}^2$
- Es gibt ein Nullelement: $(0,0)$ erfüllt: $(0,0) + (c,d) = (c,d)\ \forall (c,d) \in \mathbb{R}^2$
- Es gibt inverse Elemente: $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ Dann: $(\frac{a^2}{a^2+b^2}, \frac{-b^2}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}^2$ ist invers zu (a,b):

$$(a,b) * (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) = (\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab+ab}{a^2+b^2}) = (1,0) \tag{27}$$

- Es gibt entgegengesetzte Elemente: $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

  Dann: $(-a,-b) \in \mathbb{R}^2$ ist entgegengesetztes Element zu $(a,b) : (a,b) + (-a,-b) = (0,0)$
  Man schreibt $(a,b)^{-1}$ für das inverse zu (a,b):

Beispiel: $(2,1)^{-1} = (\frac{2}{2^2+1}, \frac{-1}{2^2+1}) = (\frac{2}{4}, \frac{-1}{5})$
$(2,0)^{-1} = (\frac{2}{4}, \frac{-0}{4}) = (\frac{1}{2}, 0)$

Man sagt: "$\mathbb{C}$ ist ein Körper" (wie $\mathbb{R}$ in $\mathbb{Q}$

Man nennt: $\mathbb{C} =: \mathbb{R}^2 = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$ den Körper der komplexen Zahlen.
Wir führen eine neue Schreibweise ein: $(a,b) =: a + \mathbf{i}b$, wobei $\mathbf{i} = (0,1)$

Also: $\mathbb{C} = \{a + \mathbf{i}b | a,b \in \mathbb{R}\}$

Addition und Multiplikation in dieser Schreibweise:

$$(a + b\mathbf{i})(c + d\mathbf{i}) = ac - bd + \mathbf{i}(ad + bc) \tag{28}$$

$$(a + b\mathbf{i}) + (c * d\mathbf{i}) = a + c + \mathbf{i}(b + d) \tag{29}$$

Wegen:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{i} * \mathbf{i} = (0 + 1\mathbf{i})(0 + 1\mathbf{i}) = -1 \rightarrow \mathbf{i} = \sqrt{-1} \tag{30}$$

kann man sich $(a + \mathbf{i}b)(c + \mathbf{i}d) = ac + \mathbf{i}^2 bd + \mathbf{i}bc + \mathbf{i}ad$ gut merken. (ausmultiplizieren)

$\rightarrow$ Beispiele

z.B:

$$\frac{2+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}} = \frac{2+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}} * \frac{1+\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = \frac{1+3\mathbf{i}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathbf{i} \tag{31}$$

$$\frac{1}{\mathbf{i}} = \frac{1}{\mathbf{i}} \frac{-\mathbf{i}}{-\mathbf{i}} = -\mathbf{i} \tag{32}$$

Einige Begriffe in Tatsachen:

- Für $z = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$ nennt man $Re(z) = a$ den Realteil von z
- Für $z = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$ nennt man $Im(z) = b$ den Imaginärteil von z
  $\rightarrow Im(z), Re(z) \in \mathbb{R}$
- Die komplexen Zahlen $0 + \mathbf{i}b$ nennt man rein imaginär
- Die komplexen Zahlen $a + \mathbf{i}0$ sind die reellen Zahlen.
- Zwei komplexe Zahlen $a + \mathbf{i}b$ und $c + \mathbf{i}d$ sind genau dann gleich, wenn $a = c$ und $b = d$
- Für $z = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$, nennt man $\overline{z} = a - \mathbf{i}b$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.
  $\overline{z}$ ensteht aus z durch Spiegelung an der reellen Achse
- Insbesondere gilt: $z = \overline{z} \rightarrow Im(z) = 0 \rightarrow z \in \mathbb{R}$
- Weiter gilt: $z * \overline{z} = (a + \mathbf{i}b)(a - \mathbf{i}b) = a^2 + b^2$
- Und: $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), Im(z) = \frac{1}{2\mathbf{i}}(z - \overline{z})$

- Merken: $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, dann: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$
  $\overline{z_1 * z_2} = \overline{z}_1 * \overline{z}_2$
- Für $z = a + \mathbf{i}b \in \mathbb{C}$ nennt man:
  $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_{+0}$ die Länge, Norm oder Betrag von Z (Pythagoras)
- In $\mathbb{C}$ gilt die Dreiecksgleichung: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

5.1 Der Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $p = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 n \geq 1, a_n, \ldots a_0 \in \mathbb{C}$ läßt sich als Produkt von Linearfaktoren schreiben:

$p = a_n(x - x_1) \ldots (x - x_k)$:
$x_1 \ldots x_k$ Nullstellen
$x_1 \ldots x_k$ Vielfachheiten der Nullstellen.

$\rightarrow$ Beispiele (Mitternachtsformel)
$ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2)$ mit $z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\sqrt{b^2 - 4ac} = \mathbf{i}\sqrt{4ac - b^2}$, falls $b^2 - 4ac < 0$

$\rightarrow$ Vorlesung am 17.5.2011

6 Komplexe Zahlen - Polarkoordinaten

6.1 Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen

Jede komplexe Zahle $z = a + \mathbf{i}b$ ist durch ihre kartesischen Koordinaten (a, b) eindeutig beschrieben. Man kann aber jeden Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 0\}$ durch Polarkoordinaten (r, φ) eindeutig beschreiben, wobei $\varphi(-\pi, \pi]$.
Man nennt φ das (Haupt-)Argument von z: $\varphi = \arg(z)$

Wie kann man z mit (r, φ) schreiben? $\rightarrow z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)(= re^{\mathbf{i}\varphi})$

Beispiele:

- $z = 1 \rightarrow r = 1, \varphi = 0 : z = 1(\cos 0 + \mathbf{i}\sin 0) = 1$
- $z = \mathbf{i} \rightarrow r = 1, \varphi = \frac{\pi}{2} : z = 1(\cos\frac{\pi}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{2}) = i$
- $z = -1 \rightarrow r = 1, \varphi = \pi : z = 1(\cos\pi + \mathbf{i}\sin\pi) = -1$
- $z = -\mathbf{i} \rightarrow r = 1, \varphi = \frac{\pi}{2} : z = 1(\cos(-\frac{\pi}{2}) + \mathbf{i}\sin(-\frac{\pi}{2}) = -i$
- $z = -1 - \mathbf{i} \rightarrow r = \sqrt{2}, \varphi = -\frac{3}{4}\pi : z = \sqrt{2}(\cos -\frac{3}{4}\pi + \mathbf{i}\sin -\frac{3}{4}\pi)$
- $z = -1 + \mathbf{i} \rightarrow r = \sqrt{2}, \varphi = \frac{3}{4}\pi : z = \sqrt{2}(\cos\frac{3}{4}\pi + \mathbf{i}\sin\frac{3}{4}\pi)$

6.2 Umrechnungsformeln:

$$a + \mathbf{i}b = (a, b) = z = (r, \varphi) = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) \tag{33}$$

Gegeben:

$$z = a + \mathbf{i}b \neq 0, a, b \in \mathbb{R} \tag{34}$$

Dann:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{35}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\frac{a}{r}, & b \geq 0 \\ -\arccos\frac{a}{r}, & b < 0 \end{cases} z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) \tag{36}$$

Gegeben:

$$z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi), r \in \mathbb{R}_{>0}, \varphi \in (-\pi, \pi] \tag{37}$$

Dann:

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases} \rightarrow z = a + \mathbf{i}b \tag{38}$$

6.3 Beispiele:

- $z = 1 - i$, Dann: $r = \sqrt{2}, \varphi = -\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4} \rightarrow z = \sqrt{2}(\cos -\frac{\pi}{2} + \mathbf{i}\sin -\frac{\pi}{4})$

Wozu Polarkoordinaten? In der Polarkoordinatendarstellung lassen sich die Multiplikation, Potenzen und Wurzeln einfach berrechnen:

$$z_1 = r_1(cos\varphi_1 + \mathbf{i}\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathbf{i}\sin\varphi_2) \tag{39}$$

$$\Rightarrow z_1 * z_2 = r_1 * r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i}(\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \tag{40}$$

Es folgt: Moivresche Formel:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + \sin(n\varphi) \tag{41}$$

Also:

$$z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi), n \in \mathbb{N} \to z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathbf{i}\sin(n\varphi)) \tag{42}$$

Beispiele:

- $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3}), z_2 = \sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{2})$
  $\Rightarrow z_1 * z_2 = \sqrt{6}(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{4})$
- $z = \cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}(= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)) \quad \frac{1}{2}(1-1+2i) = \mathbf{i}$
- $z^2 = \cos\frac{\pi}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathbf{i}(\frac{1}{2}(1-1+2i) = \mathbf{i}$
- $z^3 = \cos\frac{3\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathbf{i})$
- $z^4 = \cos\pi + \mathbf{i}\sin\pi = -1$
- $z^3 = \cos-\frac{3\pi}{4} + \mathbf{i}\sin-\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathbf{i})$
- $z^6 = \cos-\frac{\pi}{2} + \mathbf{i}\sin-\frac{\pi}{2} = -\mathbf{i}$
- $z^7 = \cos-\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin-\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathbf{i})$
- $z^8 = \cos 0 + \mathbf{i}\sin 0 = 1$

6.4 Die n-ten Wurzeln

Gegeben: $z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in Polardarstellung.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind dann die n verschiedenen komplexen Zahlen:

$$z_k := \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{43}$$

n-te Wurzeln von z, d.h. $\forall k : z_k^n = z$

Dann:

$$\forall k = 0, 1, \ldots, n-1 : z_k^n = [\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n})]^n = r(\cos(\varphi + 2k\pi) + \mathbf{i}\sin(\varphi + 2k\pi)) = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) = z \tag{44}$$

Beispiel: Die vier verschiedenen 4-ten Wurzeln aus z = -16 sind:

1. Polardarstellung: $r = 16, \varphi = \pi \rightarrow z = -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$

   - $\rightarrow z_0 = 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + \mathbf{i}\sin(\frac{\pi}{4}))$
   - $\rightarrow z_1 = 2(\cos(\frac{\pi+2\pi}{4}) + \mathbf{i}\sin(\frac{\pi+2\pi}{4})$
   - $\rightarrow z_2 = 2(\cos(\frac{\pi+4\pi}{4}) + \mathbf{i}\sin(\frac{\pi+4\pi}{4})$
   - $\rightarrow z_3 = 2(\cos(\frac{\pi+6\pi}{4}) + \mathbf{i}\sin(\frac{\pi+6\pi}{4})$

   Beachte: Die n-ten Wurzeln von $z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$ liegen auf einem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{r}$ mit dem jeweiligen Winkelabstand $\frac{2\pi}{n}$

Beispiel: $z = 1, n = 5$

$\rightarrow z = 1(\cos 0 + \mathbf{i}\sin 0)$

$z_2 = (\cos\frac{0+0}{5} + \mathbf{i}\sin\frac{0+0}{5}) = 1$
$z_2 = (\cos\frac{0+2\pi}{5} + \mathbf{i}\sin\frac{0+2\pi}{5})$
$z_2 = (\cos\frac{0+4\pi}{5} + \mathbf{i}\sin\frac{0+4\pi}{5})$
$z_3 = (\cos\frac{0+6\pi}{5} + \mathbf{i}\sin\frac{0+6\pi}{5})$
$z_3 = (\cos\frac{0+8\pi}{5} + \mathbf{i}\sin\frac{0+8\pi}{5})$

7 Lineare Gleichungssysteme

Zentrale Begriffe LGS, Gaußsches Eliminationsverfahren, Zeilenstufenform, elementare Zeilenumformungen, Matrizen, (erweiterte) Koeffizientenmatrix, Rang einer Matrix, frei wählbare Parameter, homogenes, inhomogenes System.

Ein *lineares Gleichungssystem* (LGS) mit m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ läßt sich in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \quad \text{mit } a_{ij}, b_{ij} \in \begin{cases} \mathbb{R} \text{ (reelles LGS)} \\ \mathbb{C} \text{ (komlexes LGS)} \end{cases} \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_1 &= b_m \end{aligned}$$

Ein *n-Tupel* $(l_1, \ldots l_n) \in \begin{cases} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{C}^n \end{cases}$ heißt *Lösung* von LGS.

$$\forall i: \quad a_{i1}l_1 + \ldots + a_{in}l_n = b_i$$

Gesucht ist die Menge $\mathbb{L}$ aller Lösungen des LGS.

Beispiele

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 9 \ (i) \\ 4x - y = 1 \ (ii) \end{array}\right\} \to y = 4x - 1 \left.\vphantom{\begin{array}{r} 3x \\ 4x \end{array}}\right\} \to 3x + 2(4x-1) = 9 \left.\vphantom{\begin{array}{r} 3x \\ 4x \end{array}}\right\} \to x = 1 \to y = 3$$

$\mathbb{L} = \{(1,3)\}$(Es existiert eine Lösung)$x + y = 1 \to x = 1 - y$

$$x + y = 1 \to x = 1 - y \tag{45}$$

$$\text{Setze } y = \lambda \in \mathbb{R} \text{ , dann: } x = 1 - \lambda \tag{46}$$

$$\to \mathbb{L} = \{(1-\lambda, \lambda \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ Es existieren unendlich viele Lösungungen} \tag{47}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 5 \end{array}\right\} \to y = 1 - x \left.\vphantom{\begin{array}{r} x \\ 2x \end{array}}\right\} \to 2x + 2(1-x) = 5 \left.\vphantom{\begin{array}{r} x \\ 2x \end{array}}\right\} \to 2 = 5 \quad \lightning \tag{48}$$

$$\mathbb{L} = \varnothing \text{ (Es existiert keine Lösung)} \tag{49}$$

Ein reelles oder komplexes lineares Gleichungssystem hat entweder keine oder genau eine oder unendlich viele Lösungen.

Das oben durchgeführte "Einsetzverfahren" ist nicht geeignet für mehrere Gleichungen und Unbekannte.
Besser: *Das Gaußsche Eliminationsverfahren*

Beispiel Betrachte die zwei Systeme

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \tag{50}$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \tag{51}$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2 \tag{52}$$
$$\to L = ? \tag{53}$$

und

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \tag{54}$$
$$x_2 - 4x_3 = -4 \tag{55}$$
$$-5x_3 = -3 \tag{56}$$
$$\to \mathbb{L} = \{(l_1, l_2, l_3)\} \tag{57}$$

Systeme in *Zeilenstufenform* lassen sich ganz einfach lösen. Bei den Gaußschen Eliminationsmetrik nicht man sich zunutze, dass man *jedes* Lineares Gleichungssystem durch sogenannte elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform (ZSF) bringen kann. Dabei bleibt die Lösungsmenge unverändert.

Die *elementaren Zeilenumformungen* sind:

- Vertauschen zweier Gleichungen / Zeilen
- Multiplikation einer Gleichung / Zeile mit einem $\lambda \neq 0$
- Addition des λ-fachen einer Gleichung / Zeile einer anderen Gleichung / Zeile

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} ax + by = c \\ \underbrace{(a' + \lambda a)}_{=0} x + (b' + \lambda b)y = c' + \lambda c \end{array}\right) \tag{58}$$

Wähle λ so, dass $a' + \lambda a = 0$ gilt!

Beispiele:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 2x - y = 5 \end{array}\right\} \overset{2.Z-2*1.Z}{\to} \left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 0 - 3y = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} \\ \to b = -1 \end{array}\right\} \to x = 2 \tag{59}$$
$$\to \mathbb{L} = \{(2, -1)\} \tag{60}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x+2y=5 \end{array}\right\} \overset{2.Z-2*1.Z}{\rightarrow} \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 0x+0y=3 \quad \rightarrow \lightning \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{L}=\varnothing \tag{61}$$

Beobachtung: Bei den Zeilenumformungen bracuht man nur die Koeffizienten!
$x, y, \ldots$ sind nur "Platzhalter"

7.1 Ökonomisches System mit "Matrizen"

$$\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x-y=5 \end{array} \leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \mathbb{L}=\{(2,-1)\} \tag{62}$$

$$\leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ -3y=3 \end{array}\right\} \rightarrow \mathbb{L}=\{(2,-1)\} \tag{63}$$

Obiges Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow l_1 = \frac{12}{5} \\ \rightarrow l_2 = \frac{-8}{5} \\ \rightarrow l_3 = \frac{3}{5} \end{array} \tag{64}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{12}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{3}{5} \right) \right\} \tag{65}$$

Allgemein:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_n + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \leftrightarrow \overbrace{\left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{array}{ccc} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{array}}_{Kettenmatrix\ A} & \begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \end{array}\right)}^{\text{erweiterte Kettenmatrix } (A|b)} \rightarrow \underbrace{\text{durch ZUF}}_{\ldots} \rightarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} * & * & \ldots & * & * & & * \\ & * & * & \ldots & * & & \vdots \\ & & * & \ldots & * & & \vdots \\ & & & * & * & & \vdots \\ & & & & * & & \vdots \\ & & & & & & * \\ 0 & & & & & & * \end{array}\right) \tag{66}$$

$\rightarrow$ Wenn $* \neq 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \varnothing$

$\rightarrow$ Wenn $* = 0 \Rightarrow \mathbb{L} \neq \varnothing \begin{cases} \text{eindeutig lösbar} \\ \text{unendlich viele Lösungen} \end{cases}$

Beispiele

- $\begin{array}{rl} 2x+4y & = 2 \\ 3x+6y & = 3 \\ 5x+10y & = 5 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
  $\rightarrow \mathbb{L} = \{(1-2\lambda, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$

- $\begin{aligned} x+2y+3z &= 4 \\ 2x+4y+6z &= 10 \end{aligned} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbb{L} = \varnothing$
- $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 & 13 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 18 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & 18 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
  $\Rightarrow \mathbb{L} = \{(2, 7-\lambda, \lambda, 1) | \lambda \in \mathbb{R}\}$
  z.B. $(2,7,0,1), (2,6,1,1), \ldots$

7.2 Der Rang einer Matrix

Gegeben ist eine Matrix $M = \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{s1} & \ldots & m_{st} \end{pmatrix}$ mit s Zeilen und t Spalten.
Bringt man die Matrix M mit elementaren Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform

$$M \rightarrow \ldots \rightarrow M' = \begin{pmatrix} * & * & \ldots & * & * \\ & * & * & \ldots & * \\ & & * & \ldots & * \\ & & & * & * \\ & & & & * \\ & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} & r \text{ Zeilen ungleich } 0 \ldots 0 \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} & s-r \text{ Zeilen gleich } 0 \ldots 0 \end{matrix} \tag{67}$$

so nennt man die Zahl r der Nicht-Null-Zeilen der Zeilenstufenform von M den Rang von M, in Zeichen $r = rg\, M \ (= Rg\, M)$.

7.2.1 Das Lösbarkeitskriterium

Ein Lineares Gleichungssystem mit Koeffizienten Matrix A und erweiterter Koeffizienten Matrix $(A|b)$ ist genau dann lösbar, wenn:

$$rg\, A = rg(A|b) \tag{68}$$

Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 7 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{rg\, A = rg\, (A|b)} \tag{69}$$

Was ist die Anzahl der "frei wählbaren Parameter"?$\rightarrow$ 3
Woher kommt die Zahl 3?
$3 = \#$ Unbekannte$- \#$ Nichtnullzeilen

Allgemein: Für ein lösbares lineares Gleichungssystem mitt m Gleichungen und n Unbekannten und Koeffizienten Matrix A gilt :
Anzahl der frei Wählbaren Parameter$=n - rg\,A$.

Beispiele:

- $x + y = 1 \to n = 2, rg\,A = 1 \to 1$ frei wählbarer Parameter $\to \mathbb{L} = \{(1-\lambda, \lambda)(\lambda \in \mathbb{R})\}$
- $\begin{matrix} x+y=1 \\ x-y=1 \end{matrix} \to n = 2, rg\,A = 2 \to$ kein frei wählbarer Parameter $\to \mathbb{L} = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$
- Siehe oben: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \to \left.\begin{matrix} n=5 \\ rg\,H=2 \end{matrix}\right\} \to 3$ Parameter
  $\to \mathbb{L} = \{(1-2\nu-\mu, \lambda, 2-3\mu-3\lambda, \mu, \lambda)|\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\}$

Wir halten fest:
Ein lösbares lineares Gleichungssystem hat genau dann genau eine Lösung, falls $n = rg\,A$ gilt.
Ein lineares Gleichungssystem mit $b = 0$, das heißt ein lineares Gleichungssystem der Form $(A|0)$ heißt homogen. Ist $(A|b)$ ein LGS, so heißt (A—0) das dazugehörige homogene LGS.

Merke:

1. Ein homogenes LGS hat stets die sogenannte triviale Lösung $(0\ldots 0)$
2. Summen und Vielfache von Lösungen homogener Systeme sind wieder Lösungen des homogenen Systems.

Denn:

1. $\begin{matrix} a_{11}\cdot 0 + \ldots + a_{1n}\cdot 0 = 0 \\ a_{m1}\cdot 0 + \ldots + a_{mn}\cdot 0 = 0 \end{matrix}$
2. $(h_1, \ldots, h_n), (l_1, \ldots l_n)$ Lösungen $\Rightarrow \forall i : a_{i1}(h_1 + l_1) + \ldots + a_{in}(h_n + l_n) =$
   $= a_{i1}h1 + \ldots + a_{in}h_n + a_{i1}l_1 + \ldots + a_{in} + l_n = 0 + 0 = 0$
   analog: $\lambda \cdot (l_1, \ldots, l_n)$ ist Lösung

7.3 Satz zur Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Ist $(A|b)$ ein lösbares lineares Gleichungssystem mit der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ und $(A|0)$ das zugehörige homogene LGS mit der Lösungsmenge $\mathbb{L}_n$, so gilt mit (irgendeiner) Lösung $x = (l_1, \ldots, l_n)$ von $(A|b)$:

$$\mathbb{L} = x + \mathbb{L}_n \ \ (= \{ \underbrace{x+y}_{(l_1+h_1,\ldots,l_1+h_n)\text{ für } y=(h_1,\ldots,h_n)} |y \in \mathbb{L}_n\}) \tag{70}$$

Beweis: Es ist die Gleichheit der Mengen $\mathbb{L}$ und $x + \mathbb{L}_n$ zu zeigen:
$\underline{\mathbb{L} \subseteq x + \mathbb{L}_n}$: Ist $z = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{L}$, so gilt $\forall i : a_{i1}h_1 + \ldots + a_{in}h_n = b_i$
Wegen

$$a_{i1}l_1 + \ldots + a_{in}l_n = b_i \tag{71}$$

gilt somit:

$$a_{i1}(h_1 - l_1) + \ldots + a_{in}(h_n - l_n) = 0 \tag{72}$$

das heißt

$$z - x \in \mathbb{L}_n, \text{ also } z - x = y \in \mathbb{L}_n, \text{ also } z = x + y, \text{ also } z \in x + \mathbb{L}_n \tag{73}$$

$\underline{x + \mathbb{L}_n \subseteq \mathbb{L}:}$ Ist $x + y \in x + \mathbb{L}_n, y = (h_1, \ldots, h_n)$, so:

$$\forall i : \quad a_{i1}(l_1 + h_1) + \ldots + a_{in}(l_n + h_n) = \tag{74}$$

$$= \underbrace{a_{i1}l_1 + \ldots + a_{in}l_n}_{=b_i} + \underbrace{a_{i1}h_1 + \ldots a_{in}h_n}_{=0} = b_i \tag{75}$$

das heißt:

$$x + y \in \mathbb{L} \tag{76}$$

8 Rechnen mit Matrizen

Zentrale Begriffe Reelle und komplexe $m \times n-$Matrix, quatratische, Diagonal-, Einheits-, obere Dreiecks-, untere Dreiecksmatrix, Addition von Matrizen, Multiplikation von Matrizen mit Skalaren, Multiplikation von Matrizen

8.1 Matrizen

Beachte

- Singular: Matrix (Nicht: Matrize)
- Plural: Matrizen

Ein rechteckiges Zahlenschema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =: (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} =: (a_{ij})_{m,n} =: (a_{ij}) \tag{77}$$

mit m Zeilen und n Spalten und Elementen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ nennen wir reelle $m \times n-$Matrix.
Es ist $\mathbb{R}^{m \times n} \{(a_{ij})_{m,n} | a_{ij} \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller reellen $m \times n-$Matrizen
Analog: $\mathbb{C}^{m \times n} = \{(a_{ij})_{m,n} | a_{ij} \in C\}$ ist die Menge aller komplexen $m \times n-$Matrizen
Die a_{ij} nennt man Komponenten oder Einträge oder Koeffizienten an den Stellen (i, j) und $A = (a_{ij})$

8.2 Gleichheit von Matrizen

Zwei $m \times n-$Matrizen $A = (a_{ij}$ und $B = (b_{ij})$ sind genau dann gleich, wenn $\forall i, j : a_{ij} = b_{ij}$

8.3 Besondere Matrizen

$m \times 1-$Matrizen $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, "Spalten oder Spaltenvektoren"
$n \times 1-$Matrizen $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ "Zeilen oder Zeilenvektoren"

Damit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (S_1, \dots, S_n) = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{pmatrix} \tag{78}$$

$$S_j = \begin{pmatrix} a_{j_1} \\ \vdots \\ a_{j_m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1},\ Z_i = (a_{i_1}, \dots, a_{j_n}) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \tag{79}$$

Die Matrix $0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ heißt $m \times n-$Nullmatrix.
Im Fall $n = m$, d.h. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, spricht man von quadratischen Matrizen.
Unter den quatratischen Matrizen sind wichtig:

- $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)-$Diagonalmatrizen
- $E_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = diag(1, \dots, 1) - n \times n-$Einheitsmatrix
- $O = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & * \end{pmatrix} -$obere Dreiecksmatrix
- $U = \begin{pmatrix} * & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ * & \dots & * \end{pmatrix} -$untere Dreiecksmatrix

Es gibt weitere "besondere" Matrizen ($\Rightarrow$ später)
Analog: $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$. Im folgenden formulieren wir alles für $\mathbb{R}$, es gilt alles genau so für $\mathbb{C}$.

8.4 Addition von Matrizen

Das haben wir im Fall von Zeilen bereits bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen gemacht:

$$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}, A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \Rightarrow A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \tag{80}$$

Beachte Man kann nur Matrizen vom gleichen Typ addieren! $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 7 & 10 & 9 \end{pmatrix} \tag{81}$$

8.5 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \lambda \in \mathbb{R}, A = (a_{ij}) \Rightarrow \lambda \cdot A := (\lambda a_{ij}) \tag{82}$$

Beispiele

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \lambda = 2 \Rightarrow \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda = -2 \Rightarrow \lambda \cdot A = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

Anstelle von $(-1) \cdot A$ schreibt man $-A$

8.6 Rechenregeln

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-A) = 0$
5. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
6. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

Etwas aufwendiger ist die Multiplikation von Matrizen mit Matrizen

8.7 Multiplikation von Matrizen

Zuerst Zeile mal Spalte:

$$\underbrace{(1,2,3)}_{1\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = \underbrace{5}_{1\times 1} \tag{83}$$

Allgemein

$$Z = (a_1, \dots, a_n), S = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow Z \cdot S := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{84}$$

Beachte Die Spaltenzahl der Zeile = Zeilenzahl der Spalte!
Nun kommt die Verallgemeinerung auf allgemeine Matrizen:

$$A = (a_{ij})_{m,n} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, B = (b_{jk})_{n,p} = (S_1, \dots, S_p) \in \mathbb{R}^{n\times p} \tag{85}$$

$$\Rightarrow A \cdot B = (c_{ik})_{m,p}\, mit\, c_{ik} = Z_i \cdot S_k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \tag{86}$$

Beachte

- $A \cdot B = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_m \end{pmatrix} (S_1, \dots, S_p) = \begin{pmatrix} Z_1S_1 & Z_1S_2 & \dots & Z_1S_p \\ \vdots & & & \vdots \\ Z_mS_1 & Z_mS_2 & \dots & Z_mS_p \end{pmatrix}$
- An der Stelle (i, h) des Produktes steht $Z_i \cdot S_h$
- Die Spaltenzahl der ersten Matrix muss gleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix sein
- $m \times n$ mal $n \times p$ ergibt $m \times p$-Matrix

Frage Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ quadratisch, dann kann man $A \cdot B$ und $B \cdot A$ bilden.
Gilt umgekehrt auch: kann man $A \cdot B$ und $B \cdot A$ bilden, so sind A und B quatdratisch?
Nein, da es sein kann, dass $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist. m und n müssen also nicht zwingend gleich sein.

Beispiele:

- $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{3\times 4} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 9 & 6 & 9 \\ 8 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}}_{2\times 4}$

- $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{3\times 1} \underbrace{(2, 3, 1)}_{1\times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}}_{3\times 3}$

- Eine Diagonalmatrix vervielfacht die Zeilen/Spalten, wenn sie links/rechts steht:
  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 21 & 24 & 27 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 10 & 18 \\ 7 & 16 & 27 \end{pmatrix}$
  Beachte: Es <u>kann</u> $AB = BA$ gelten, muss aber nicht!
  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  Man sagt: Für $n \geq 2$ ist die Multiplikation von $n \times n$-Matrizen <u>nicht</u> kommutativ, da:
  $\exists A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $AB \neq BA$ ($\mathbb{C}^{n\times n}$ genauso)

8.8 Rechenregeln

Für quadratische Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (gilt auch allgemein für nichtquadratische Matrizen) gilt:

- $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- $E_n A = A = A \cdot E_n$
- $A^k := \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{-mal}}$

Beachte

- Es kann $A \cdot B = 0$ gelten, obwohl $A, B \neq 0$:
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

- Man darf auch nicht kürzen, d.h., aus $A \cdot C = B \cdot C$ folgt nicht unbedingt $A = B$
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot C = 0 = B \cdot C$, aber $A \neq B$

Abschließend noch ein Beispiel mit komplexen Matrizen:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow A + B \begin{pmatrix} 3+i & 1+i \\ i & 2+i \end{pmatrix} \Rightarrow (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 3+i & 1+i \\ i & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+i & 1+i \\ i & 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+7i & 3+6i \\ -2+5i & 2+5i \end{pmatrix}$

Vorsicht $\quad (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

9 Transponieren und Invertieren von Matrizen

Vereinbarung: $\mathbb{K}$ steht für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

9.1 Transponieren von Matrizen

Ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$, so nennt man die Matrix

$$A^T := (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{87}$$

die zu A transponierte Matrix oder das Transponierte von A

Bsp:

$$z = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \rightarrow Z^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{88}$$

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \rightarrow S^T = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} \tag{89}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \tag{90}$$

Quadratisch bleibt quadratisch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \tag{91}$$

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt symetrisch, falls $A^T = A$.
Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt schiefsymmetrisch, falls $A^T = -A$

$\underbrace{A}_{a_{ij}}$ schiefsymmetrisch $\Rightarrow \underbrace{A^T}_{a_{ji}} = \underbrace{-A}_{-a_{ij}} \Rightarrow j = i \Rightarrow a_{ii} = -a_{jj} \Rightarrow \forall_i : a_{ii} = 0$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -A \tag{92}$$

Rechenregeln:

- $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n} \Rightarrow (A+B)^T = A^T + B^T$
- $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow (\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $A \in \mathbb{K}^{m \times n} \Rightarrow (A^T)^T = A$
- $A \in \mathbb{K}^{m \times n}, B \in \mathbb{K}^{n \times p} \Rightarrow (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $a, b \in \mathbb{K}^n \Rightarrow a^T b = b^T a$

Bsp:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{2\times 3}, B = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{3\times 3}, B^T A^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 5 & 11 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \tag{93}$$

$$\Rightarrow (AB)^T = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 \\ -9 & 11 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 5 & 11 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \tag{94}$$

Im reellen spielen die symmetrischen Matrizen eine wichtige Rolle. Im komplexen übernehmen die "hermetischen" Matrizen diese Rolle:

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, A = (a_{ij})$, setzen wir $\overline{A} := (\overline{a_{ij}}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$
Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt symmetrisch, falls $A^T = \overline{A} (\Leftrightarrow \overline{A}^T = A)$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} = \overline{A} \tag{95}$$

Beachte:

$$a_{ii} \in \mathbb{R}, \quad \forall_i \text{ bei hermitischen Matrizen: } (a_{ji}) = A^T = \overline{A} = \overline{a_{ij}}$$
$$(\text{mit } j = i \quad a_{ii} = \overline{a_{ii}} \quad a_{ii} \in \mathbb{R})$$

9.2 Invertieren von Matrizen

Nur für quadratische Matrizen!

Eine $n \times n$ - Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt *invertierbar*, falls es ein $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt mit $AB = E_n = BA$

Die Matrix B nennt man das Inverse zu A und schreibt $B = A^{-1}$

Nicht jede Matrix ist invertierbar:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{96}$$

Bemerkung: Falls $AB = E_n$, dann: $BA = E_n$ (Begründung nicht einfach $\rightarrow$ später)

$\rightarrow$ Nur eine der Gleichheiten ist nachzuweisen.

Bsp:

$$\forall_n : E_n * E_n = E_n \Rightarrow (E_n)^{-1} = E_n \tag{97}$$

$$(-E_n)(-E_n) = E_n \quad \Rightarrow (-E_n)^{-1} = -E_n \tag{98}$$

Merke:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } ad - bc \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{99}$$

Denn:

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -cb+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \tag{100}$$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3*2-5*1} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{101}$$

Leider: $n \geq 3 \rightarrow$ nicht sooo leicht.

Rechenregeln:

- $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar $\Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$
- $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertierbar $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
  Denn:
  (a) $AA^{-1} = E_n \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$
  (b) $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^-1)A^{-1} = AA^{-1} = E_n$

Bemerkungen:

$$\text{LGS:} \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{102}$$

$$\rightarrow Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix} \tag{103}$$

$$x = A^{-1}b \quad \text{ABER: } A^{-1} \text{ ist umständlicher als Gauß-Eliminierung} \tag{104}$$

Bestimmung von A^{-1} Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar mit Inversem $B = \begin{pmatrix} s_1 & \dots s_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so gilt:

$$AB = A\begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} As_1 & \dots & As_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{105}$$

Löse in LGS:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1, \quad Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_2, \quad \dots \quad Ax = e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{106}$$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 8 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \dots \to \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E_n} \middle| \underbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & .2 & 3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 1 & -4 & 10 \end{matrix}}_{s_1 \quad s_2 \quad s_3}}_{A^{-1}} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -6 \\ 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \tag{107}$$

9.3 Invertieren einer Matrix

Gegeben: Invertierbare Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

- schreibe $(A|E_n)$
- elementare Zeilenumformungen $\to (E_n|A)$

Woran erkennt man, dass A invertierbar ist?
$\to$ Am Rang, es gilt:

$$A \; inv. \leftrightarrow rg(A) = n \tag{108}$$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ z & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \Rightarrow (A|E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} x & y & 1 & 1 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -z \\ 1 & -y & -x+yz \end{matrix}}_{A^{-1}} \right) \tag{109}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \to (A|E_n) \to \dots \to rg(A) < 4 \Rightarrow \text{ nicht invertierbar} \tag{110}$$

Eine Matrix heißt orthogonal, wenn:

$$A^T * A = E_n \tag{111}$$

Bsp

$$E_n, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \to \text{ sind orthogonal} \tag{112}$$

$$A^T A = E_n \text{ bedeutet:} \tag{113}$$

$$A^T = A^{-1} \to AA^T = E_n \tag{114}$$

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} s_1^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{pmatrix} \tag{115}$$

$$\begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1^T s_1 & s_1^T s_2 & \dots & s_1^T s_n \\ \vdots & & & \\ s_n^T s_1 & s_n^T s_2 & \dots & s_n^T s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \tag{116}$$

$$\text{d.h. } s_i^T s_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j, s_i \perp s_j, i \neq j, |s_i| = 1 \end{cases} \tag{117}$$

Analog:

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots z_n \end{pmatrix} \to AA^T \to Z_i \perp Z_j, i \neq j, |z_i| = 1 \tag{118}$$

10 Die Determinante

Zentrale Begriffe Determinante, Streichungsmatrix, Regel von Sarrus, Entwicklung nach i-ter Zeile(j-ter Spalte)

Definition der Determinate : Eigentlich ist die Determinante eine Abbildung

$$det \begin{cases} K^{n\times n} & \to K \\ A & \to det A \end{cases}, \text{ K ist } \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C} \tag{119}$$

Die Berechnung von $det\, A$ aus A kann ziemlich langwierig werden.
Wir erklären, wie man $det\, A$ aus A ermittelt:

10.1 Die Streichungsmatrix

:
Gegeben $A \in K^{n\times n}$, $ij \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$- Matrix, die aus A entsteht, indem wir in A die i-te Zeile und j-te Spalte Streichen, die Streichungsmatrix.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \to A_{44} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} \tag{120}$$

Die Determinante eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ wird rechnerisch berechnet:
Gegeben:

$$A = (a_{ij} \in K^{n\times n} \tag{121}$$

1.Fall:

$$n = 1 \Rightarrow det(a_{ij}) = a_{11} \tag{122}$$

2.Fall:

$$n > 1 \Rightarrow det(a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, a_{i1}\, det\, A_{i1} = \tag{123}$$

$$= a_{11} det\, A_{11} - a_{21} det\, A21 + a_{31} det\, A_{31} ... (-1)^{n+1} a_{n1} det\, A_{n1} \tag{124}$$

Beachte: Die Berechnung einer "$n \times n$-Determinante" wird auf die Berechnung von "$(n-1) \times (n-1)-$Determinanten" zurückgeführt.

Beispiele

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 1\, det\, 4 - 3\, det\, 2 = -2$

  Allgemein: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{n\times n} \Rightarrow det\, A = ad - bc\ (det\, A = |A|)$

- $det(A) = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1(5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 4(1\cdot 8 - 2\cdot 4) + 7(12-15) = 0$

  Allgemein: "Regel von Sarrus"

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}, \ A \in K^{n\times n} \tag{125}$$

  Vorsicht: Für $n \geq 4$ gibt es keine solch einfache Merkregel:

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \dots$

  Beobachtung:

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot |\dots| + 0 \cdot |\dots| - 0 \cdot |\dots| \tag{126}$$

  Hat die erste Spalte viele Nullen $\Rightarrow$ "einfach"
  Nullen kann man erzeugen, dabei ändert sich die Determinante nicht.

10.2 Rechenregeln

Gegeben: $A \in K^{n\times n}, A = (a_{ij})$

- $\forall j \in \{1, \dots, n\} : det\, A = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det\, A_{ij}$
  $\Rightarrow$ Entwickle nach j-ter Spalte
- $\forall i \in \{1, \dots, n\} : det\, A = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det\, A_{ij}$
  $\Rightarrow$ Entwickle nach i-ter Zeile
- $det\, A = det\, A^T$
- $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n, \ A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$
- $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{vmatrix} B & C \\ 0 & D \end{vmatrix}$, B, D quadratisch $\Rightarrow det\, A = det\, B \cdot det\, D$
- $A = B \cdot C$, B, C quadratisch $\Rightarrow det(A) = det\, B \cdot det\, C$ "Determinantenmultiplikationssatz"
- Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante
- Multipliziert man eine Zeile oder Spalte mit $\lambda \neq 0$, so gilt: $|A'| = \lambda |A|$
- Addiert man zu einer Zeile/Spalte das $\lambda-$fache einer anderen Zeile/Spalte, so ändert sich die Determinante nicht.

Vorgehen zur Berechnung von $|A|$:

1. Hat A Blockdreiecksgestalt?
   falls ja $\Rightarrow |A| = |B| \cdot |D|$
   falls nein $\Rightarrow$ 2.
2. $\exists$ Zeile, Spalte mit vielen Nullen?
   Falls ja $\Rightarrow$ Entwicklung nach dieser Zeile, Spalte
   Falls nein $\Rightarrow$ 3.
3. Erzeuge Nullen durch Zeilen/Spaltenumformungen

10.3 Drei wichtige Regeln

Für $A \in K^{n \times n}$

- Ist A invertierbar, so gilt: $det(A^{-1}) = (det\, A)^{-1}$
- Hat A zwei gleiche Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$
- $det(\lambda A) = \lambda^n \, det\, A$

11 Anwendungen der Determinante

Zentrale Begriffe Invertierbarkeitskriterium, Cramersche Regel

11.1 Das Invertierbarkeitskirterium

Wir wiessen: $A \in k^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $rg\, A = n$. Mit der Determinante kennen wir ein weiteres solches Invertierbarkeitskriterium angeben:

Eine Matrix $A \in k^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $det\, A \neq 0$ gilt.

Denn: Bringe A mit elementaren Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

$$A \to Z = \begin{pmatrix} z_{11} & & * \\ & \ddots & \\ & & z_{nn} \end{pmatrix} \tag{127}$$

$det\, A \neq 0 \Leftrightarrow det\, Z \neq \Leftrightarrow z_{11}, \ldots, z_{nn} \neq 0 \Leftrightarrow rg\, A = n \Leftrightarrow A$ ist invertierbar
Dieses Kriterium ist der eigentliche Grund für die Einführung der Determinante. Wier zeigen, inwiefern das nützlich sein wird:
Gegeben ist eine Matrix $A \in K^{n \times n}$. Gesucht ist ein Vektor $v \in k^n, v \neq 0$, mit $Av = \lambda v$ für ein $\lambda \in K$. Man sagt: "v wird auf ein Vielfaches von sich Abgebildet."

Anwendungen: Differentialgleichungen, Trägheitsachsenbestimmung,...
Wie findet man v und zugehöriges λ ($v = 0$ will man nicht!):

$$\begin{aligned} Av = \lambda v, v \neq 0 \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0, v \neq 0 &\Leftrightarrow (A - \lambda E_n)v = 0, v \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda E_n) \text{ hat } \underline{\text{nicht}} \text{ Rang } n \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda E_n)\text{ist } \underline{\text{nicht}} \text{ invertierbar} \\ &\Leftrightarrow det(A - \lambda E_n) = 0 \end{aligned} \tag{128}$$

Aufgabe: Bestimme $\lambda \in K$ so, dass $det(A - \lambda E_n) = 0$ gilt.

Beispiel:

$$A : \begin{pmatrix} 1 & 22 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \to A - \lambda E_2 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \to det(A - \lambda E_2) = (1-\lambda)^2 - 4 = \tag{129}$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) \tag{130}$$

Damit: Für $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$: $det(A - \lambda E_2) = 0$, das heißt:

$$Z = \quad \lambda_1 = -1 \; \exists v_1 \in \mathbb{R}^2 : Av_1 = -v_1 \tag{131}$$

$$Z = \quad \lambda_2 = 3 \; \exists v_2 \in \mathbb{R}^2 : Av_2 = -v_2 \tag{132}$$

Man findet $v_{1/2}$ durch lösen des Systems $(A - \lambda_{1/2} E_2)$:
Zu v_1:

$$(A - \lambda_1 E_2 | 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & | & 0 \\ 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{133}$$

Zu v_2:

$$(A - \lambda_2 E_2|0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & | & 0 \\ 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{134}$$

$\to$ Probe $Av_1 = -v_1$, $Av_2 = 3v_2$

11.2 Die Cramer'sche Regel

Gegeben ist ein Lineares Gleichungssystem: $\boxed{Ax = b}$ mit invertierbarer Matrix $A \in K^{n\times n}$. Die Cramersche Regel liefert die Komponenten $\boxed{l_1, \dots l_n}$ des eindeutig bestimmten Lösungsvektors $(l_1, \dots, l_n)^T$ wie folgt:
Zu $A = (s_1, \dots, s_n)$ setze $A_i = (s_1, \dots, s_{i-1}, b, s_{i+1}, \dots, s_n)$
Dann gilt:

$$l_i = \frac{det\,A_i}{det\,A} \tag{135}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcr} -x_1 + 8x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 & = & 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 & = & -1 \end{array} \to A = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = b \tag{136}$$

Wir berechnen die Determinante von A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 0 & 20 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 20 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 5 \tag{137}$$

Damit ist A invertierbar.

Die MatrizenA_1, A_2, A_3 lauten:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{138}$$

Es gilt:

$$det\,A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 25 \tag{139}$$

$$det\,A_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \tag{140}$$

$$det\,A_3 = \begin{vmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 25 \tag{141}$$

Die Cramer'sche Regel liefert also:

$$l_1 = \frac{det\,A_1}{det\,A} = \frac{25}{5} = 5 \quad (142)$$
$$l_2 = \frac{det\,A_2}{det\,A} = \frac{-5}{5} = -1 \quad (143)$$
$$l_3 = \frac{det\,A_3}{det\,A} = \frac{25}{5} = 5 \quad (144)$$

Mit Gauß geht es schneller:

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 & | & 2 \\ 2 & 4 & -1 & | & 1 \\ -2 & 1 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -8 & -3 & | & -2 \\ 0 & 20 & 5 & | & 5 \\ 0 & 5 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -8 & -3 & | & -2 \\ 0 & 4 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -5 \end{pmatrix} \to \quad (145)$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & -8 & 0 & | & 13 \\ 0 & 4 & 0 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \to (l_1, l_2, l_3) = (5, -1, 5) \quad (146)$$

11.2.1 Begründung der Cramer'schen Regel

Ist $v = (l_1, \ldots, l_n)^T$ die eindeutig bestimmte Lösung von $Ax = b$ mit $A = (s_1, \ldots s_n)$, so gilt:

$Av = b$, d.h. $(s_1, \ldots, s_n) \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = b$, d.h. $\sum_{j=1}^{n} l_j s_j = l_1 s_1 + \ldots + l_n s_n = b$

Damit:

$$det\,A_i = det(s_1, \ldots, s_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} l_j s_j, s_{i+1}, \ldots, s_n) \quad (147)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} l_j \underbrace{det(s_1, \ldots s_{i-1}, s_j, s_{i+1}, \ldots, s_n)}_{=0 \text{ für } j \neq i} \quad (148)$$
$$= l_i det(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) = l_i\, det\,A \quad (149)$$
$$\Rightarrow l_i = \frac{det\,A_i}{det\,A} \quad (150)$$

Bemerkung: Die "Adjunkte" ist eine weiter Anwendung der Determinante. Mit der Adjunkten kann man die Inverse A^{-1} einer invertierbaren Matrix A berechnen. Wir betrachten diese Anwendung wegen ihrer Bedeutungslosigkeit für die Ingenieurmathematik <u>nicht</u>.

12 Vektorräume

Zentrale Begriffe: Vektorraum, Vektoren, Untervektorraum, Kern einer Matrix, Linearkombination, lineare Hülle, lineare (Un-)Abhängigkeit

Definition des Vektorraums K bezeichne $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
Eine nicht leere Menge V mit zwe Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ heißt ein Vektorraum über K (oder kurz $K-$Vektorraum, $K-$VR), wenn für alle $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in K$:

1. $v + w \in V$, $\lambda v \in V$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $\exists$ Element $0 \in V \;:\; 0 + V = V$
4. $\exists v' \in V : v + v' = 0$
5. $v + w = w + v$
6. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
7. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu \cdot v)$
8. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$
9. $1v = v$

- Ist V ein $K-$Vektorraum, so nennt man die Elemente Vektoren
- Die 0 aus (3.) heißt Nullvektor
- Das v' aus (4.) heißt das zu v entgegengesetzte Element
  oder der zu v inverse Vektor
  oder das Negative zu v
- $K = \mathbb{R} \to$ realer Vektorraum
- $K = \mathbb{C} \to$ komplexer Vektorraum
- $+$ ist die Vektoraddition
- $\cdot$ ist die Multiplikation mit Skalaren

Beispiele:

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \middle| \; v_1, \ldots, v_n \in K \right\}$
  mit $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$
  und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$ ein $K-$Vektorraum

- Die Menge $K^{m\times n} = \{(a_{ij}) | a_{ij} \in K\}$ ist mit $(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})$ und $\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$ ein K-Vektorraum.
$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, -(a_{ij}) = (-a_{ij})$

- Die Menge $K[X] := \left\{ \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i \middle| n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K \right\}$ alle Polynome über K ist mit
$\sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i + \sum\limits_{i=0}^{n} b_i X^i = \sum\limits_{i=0}^{n} (a_i + b_i) X^i$
und $\lambda \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i = \sum\limits_{i=0}^{n} (\lambda a_i) X^i$ ein $K-$Vektorraum:
$0 = \sum\limits_{i=0}^{n} 0 \cdot X^i, -\sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i = \sum\limits_{i=0}^{n} (-a_i) X^i$

- Für jede Menge M ist $K^M := \{f | f : \mu \to K \text{ Abbildung}\}$ ist mit

$$f + g : \begin{cases} M \to K \\ x \to (f+g)(x) := f(x) + g(x) \end{cases} \tag{151}$$

und

$$\lambda f : \begin{cases} M \to K \\ x \to (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \end{cases} \tag{152}$$

ein $K-$Vektorraum

12.1 Untervektorräume

Eine Teilmenge U eines $K-$Vektorraums V heißt Untervektorraum (UVR) von V, falls gilt:

1. $U \neq \varnothing$
2. $\forall u, v \in U : u + v \in U$
3. $\forall u \in U, \forall \lambda \in K : \lambda u \in U$

Wegen (3.) enthält ein Untervektorraum U stets den Nullvektor 0. Daher zeigt man (1.) meist, indem man $0 \in U$ nachweist.

Beispiele:

- $U := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n \middle| v_i \in K \right\}$ ist ein Untervektorraum von K^n:
    1. $0 \in U$

2. $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} + w_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in U$

3. $\lambda \in K, v = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in U \rightarrow \lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in U$

- $D = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in K^{n \times n} \middle| \lambda_i \in K \right\}$ ist Untervektorraum von $K^{n \times n}$

1. $0 \in D$
2. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n + \mu_n \end{pmatrix} \in D$
3. $\lambda \in K, \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in D$

   $\Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\lambda_n \end{pmatrix} \in D$

- $\mathbb{R}[X]_2 = \left\{ \sum_{i=0}^{2} a_i X^i \middle| a_i \in \mathbb{R} \right\}$, das ist die Menge aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2, ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$

1. $0 \leq \mathbb{R}[X]_2$
2. $(a_2X^2 + a_1X + a_0) + (b_2X^2 + b_1X + b_0) = (a_2 + b_2)X^2 + (a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0) \in \mathbb{R}[X]_2$
3. $\lambda(a_0 + a_1X + a_2X^2) = \lambda a_0 + \lambda a_1 X + \lambda a_2 X^2 \in \mathbb{R}[X]_2$

Allgemein: $K[X]_n$- der Polynome P mit $deg(P) \leq n$ ist ein Untervektorraum von $K[X]$.

- $U = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \middle| f(1) = 0 \right\}$ ist Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

1. f mit $f(x) = e^x - e \in U$
2. $f, g \in U \rightarrow (f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$
   $\Rightarrow f + g \in U$
3. $\lambda \in \mathbb{R}, f \in U \Rightarrow \lambda f(1) = \lambda 0 = 0$

- Für jeden Vektorraum V gilt: Es sind V und $\{0\}$ Untervektorräume von V. Man nennt V und $\{0\}$ die trivialen Untervektorräume von V

- Für jede $m \times n-$Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des homogenen Linearen Gleichungssystems, nämlich $(A|0)$, ein Untervektorraum von K^n:

  1. $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}$
  2. $u, v \in \mathbb{L} \Rightarrow Au = 0, Av = 0 \Rightarrow A(u+v) = 0$
  3. $u \in \mathbb{L}, \lambda \in K \Rightarrow Au = 0, \lambda \in K \Rightarrow A(\lambda u) = \lambda Au = 0$

Das letzte Beispiel ist sehr wichtig . Wir führen in diesem Zusammenhang einen neuen Begriff ein:

12.2 Kern einer Matrix

Ist $A \in K^{m\times n}$ so nennt man die Menge

$$Ker(A) := \{v \in K^n | Av = 0\} \subseteq K^n \tag{153}$$

den Kern von A. Tatsächlich ist der Kern von A nichts anderes als die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$
Obiges Beispiel besagt:
$\boxed{\text{Der Kern von } A,\ A \in K^{m\times n}, \text{ ist ein Untervektorraum von } K^n}$

12.3 Lineare Hülle

Gegeben: Verschiedene Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$, V ein $K-$Vektorraum, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$
Dann nennt man den Vektor $v \in V$:

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \tag{154}$$

eine Linearkombination (LK) von $v_1, \ldots, v_n$ oder von $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Prägnant: Eine Linearkombination (LK) ist eine endliche Summe von Vielfachen von Vektoren.

Beispiele:

- Der Vektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination von
  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, da $v = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$
  Beachte: Die Frage, ob eine Spalte Linearkombination einer anderen Spalte ist führt auf ein lineares Gleichungssystem:

- Jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ ist Linear Kombination von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Das Polynom $p = 2x + 3 \in \mathbb{R}[X]$ ist eine Linearkombination von $p_1 = X + 1, p_2 = 1$
  $p = 2 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2$

Ist X eine nichtleere Teilmenge eines K-Vektorraums V, so nennt man die Menge

$$< X >:= Lin(X) := span(X) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \middle| n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, v_1, \dots, v_n \in X \right\} \subseteq V \quad (155)$$

aller möglichen Linearkombinationen von Elementen aus X die lineare Hülle
oder das Erzeugnis von X.

Es gilt: $X \subseteq V, X \neq \varnothing$

- $X \subseteq < X >$
- $< X >$ ist ein Untervektorraum von V
- $< X >$ ist der kleinste Untervektorraum von V, mit $X \subseteq U$.
- Ist X endlich, $X = v_1, \dots, v_n$, so gilt:

$$< X > = < v_1, \dots, v_n > = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \middle| \lambda_i \in K \right\} = K v_1 + \dots + K v_n \quad (156)$$

Man sagt X erzeugt den Untervektorraum $< X >$ oder X ist ein erzeugendes System $< X >$

Beispiele

- $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow < X > = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$
- $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow < X > = \mathbb{R}^2$
- $X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow < X > = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $X = \mathbb{R}^3 \Rightarrow < X > = \mathbb{R}^3$
- $X = \{1, X, X^2\} \subseteq \mathbb{R}[X] \Rightarrow < X > = \mathbb{R}[X]_2$

Beachte: Jeder Vektorraumg bzw. Untervektorraum hat ein erzeugendes System. Im Allgemeinen sogar viele verschiedene.
Es sind zum Beispiel $1, X, X^2$ und $\{2, X + 1, X + 2, X + 3, 2X^2\}$ erzeugendes System von $\mathbb{R}[X]_2$

13 Basen von Vektorräumen

Zentrale Begriffe :
Lineare Abhängigkeit, Basis, Basisergänzungssatz, Diminsion, Standartbasis, eundeutige Darstellbarkeit

Lineare Abhängigkeit :
Verschiedene Vektoren $v_1, \dots, v_n$ eines K-Vektorraums V heißen linear abhängig, wenn für jede echte Teilmenge $T \subsetneq \{v_1, \dots, v_n\}$:

$$< T > \subsetneq < v_1, \dots, v_n > \tag{157}$$

Salopp: Keiner der Vektoren $v_1, \dots, v_n$ ist überflüssig
Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ heißen linear abhänig, wenn sie nicht linear unabhängig sind, d.h:
$v_1, \dots, v_n$ linear abhängig $\Leftrightarrow \exists T \subsetneq \{v_1, \dots, v_n\}$ mit $< T >= \{v_1, \dots, v_n\}$

Salopp : Mindestens ein Vektor v_i aus $v_1, \dots, v_n$ ist "überflüssig"; v_i ist eine Linear Kombination der anderen.

Beispiel :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{158}$$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ sind linear abhängig: $< v_1, v_2, v_3 >= \mathbb{R}^2 =< v_1, v_2 >=< v_1, v_3 >=$
$=< v_2, v_3 >$
$\forall B\, E\, \mathbb{R} :< v_1, v_2 >, < v_1, v_3 >, < v_2, v_3 >$ sind linear unabhängig

13.1 Lineare Unabhängigkeit von Mengen

:
Eine Menge $x \subseteq V$ von (verschiedenen) Vektoren heißt linear unabhängig, falls je endlich viele verschiedene Vektoren $v_1, \dots, v_n \in X$ linear unabhängig sind (und natürlich linear abhängig, falls X nicht linear unabhängig ist).
Will man nachweißen, dass gegebene Vektoren linear abhängig/unabhängig sind, so ist das mit der Definition nicht einfach. Zum Glück gibt es ein leicht handhabbares Kriterium:

13.2 Das Kriterium für lineare (Un)Abhängigkeit

:

- Die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$sind genau dann linear unabhängig, wenn:
  Aus $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. folgt $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$
- Die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ sind genau dann linear abhängig, wenn:
  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_n v_n = 0$,wobei mindestens ein $\lambda_i \neq 0$ ist.

Die wesentlichen Schritte beim Beweis dieses Kriteriums sind:

- "$\Rightarrow$"$v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig $\Rightarrow$ wäre ein $\lambda_i \neq 0$ in $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0$
  $v_i = -\frac{1}{\lambda_i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j v_j\right) \in < v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n > ↯$

- "$\Leftarrow$"$\sum \lambda_i v_i = 0$ impliziert $\lambda_1 = \ldots = \lambda : n = 0 \Rightarrow$ Wären $v_1, ..., v_n$ linear abhängig, so gäbe es ein i in $\lambda_1, \ldots \lambda_n \backslash \lambda_i$ mit
  $v_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j v_j \Rightarrow \sum \lambda_i v_i + (-1)v_i = 0↯$

Beispiele

- Der Nichtvektor ist linear abhängig: $1 \cdot 0 = 0$, aber $1 \neq 0$

- $v \neq 0 \Rightarrow v$ ist linear unabhängig: $\lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

- $\forall n$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ : \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ : \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ : \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^n$ sind linear unabhängig:
  $\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ : \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ : \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$

- $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig:
  $\underbrace{(-1)}_{\lambda_1} v_1 + \underbrace{1\cdot}_{\lambda_2} v_2 + \underbrace{(-1)}_{\lambda_3} v_3 = 0$, obwohl $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nicht alle Null sind.

- Die Menge $B = \{1, x, x^2, x^3, ...\} \subseteq \mathbb{R}[x]$ ist linear unabhängig.
  $\Rightarrow$ HA

- Die Vektoren $sin, cos \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sind linear unabhängig:
  aus $\lambda_1 cos + \lambda_2 sin = 0$ folgt:
  $\forall x \in \mathbb{R} : \lambda_1 cos\, x + \lambda_2 sin\, x = 0(x) = 0$
  $\Rightarrow \lambda_1 cos\, 0 + \lambda_2 sin\, 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$
  $\Rightarrow \lambda_1 cos\, \frac{\pi}{2} + \lambda_2 sin\, \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$
  $\Rightarrow sin, cos$ sind linear unabhängig

13.3 Basis

:
Gegeben ist ein K-Vektorraum V.
Eine Teilmenge B von V heißt Basis von V, falls

- $< B >= V$ (B erzeugt V)

- B ist linear unabhängig

Kurz: Basen sind linear unabhängige erzeugende Systeme
Beispiele:

- $\forall n \in \mathbb{N} : E_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ mit $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ : \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ mit 1 in der i'ten Zeile ist Basis des K^n

- $\forall n \in \mathbb{N} : B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ : \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ : \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ : \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ : \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_{n-1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ : \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_n} \right\}$ ist Basis des K^n

Denn

- B ist linear unabhängig:
  $$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ : \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ : \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ : \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ : \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
  impliziert: $\lambda_1 = 0 \ldots \lambda_n = 0$

- B ist erzeugendes System von K^n: Das lineare Gleichungssystem
  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & .. & .. & 1 & | & x_1 \\ : & : & & . & 0 & | & : \\ : & : & . & & : & | & : \\ : & 1 & & & : & | & : \\ 1 & 0 & .. & .. & 0 & | & x_n \end{pmatrix} \text{ ist } \forall \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ : \\ : \\ \lambda_n \end{pmatrix} \text{ lösbar.}$$

- $B = \{1, x, x^2, \ldots\}$ ist Basis von $K[x]$

- Sind $v_1, \ldots, v_n$ unabhängig in V, so ist $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von $< v_1, \ldots, v_n >$

- In $K^{m \times n}$ ist
  $$B = \underbrace{\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ : & & & : \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{=:E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ : & & & : \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{=:E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ : & & & : \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}}_{=:E_{mn}} \right\}}_{\text{Standart-Einheitsmtarizen}}$$
  eine Basis.

Übrigens :
Die Basis $E_n = (e_1, \dots, e_n)$ von K^n nennt man die Standartbasis oder kanonische Basis des K^n

13.3.1 Merkregeln bzw. wichtige Sätze

1. Jeder K-Vektorraum V besitzt eine Basis
2. Jedes Erzeugende System von V enthält eine Basis von V
3. Jede linear unabhängige Teilmenge von V enthält einen Basis von V
   $\Rightarrow$ auch Basisergänzungssatz
4. Ist B eine Basis von V, so ist jedes $v \in V$ eindeutlig als Linear Kombination von B darstellbar.
   $\Rightarrow$ bedeutet: $\forall v \in V$ lässt sich auf genau eine Art und Weise in der Form $v = \lambda_1 b_1, \dots \lambda_n b_n$ mit $b_1 \dots b_n \in B$ und $\lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ darstellen.
5. Je zwei Basen B und B' von V haben gleich viele Elemente

Beispiele zu 2. und 3. :
Gegeben:

$$E = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_3}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_4}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_5}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}_{v_6} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n \tag{159}$$

Aufgabe: Bestimme Basis von $< E >$
Lösung: Schmeiße "überflüssige" Vektoren raus: schreibe dazu die Spalten als Zeilen in eine Matrix und führe elementare Zeilen-Umformungen (aber keine Vertauschungen) durch:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&-1&0&1\\0&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&2&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&2\\0&0&0&2\\0&0&0&2\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \tag{160}$$

$\Rightarrow$ Die Nullzeilen bedeuten, dass v_5 und v_6 linear Kombinationen von $v_1 \dots v_4$ sind.
$\Rightarrow$ Die Zeilenstufenform bedeutet, dass $v_1 \dots v_4$ linear unabhängig sind.
Es folgt: $B = \{v_1, \dots, v_4\}$ ist eine Basis von $< E >$

Gegeben:

$$E = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\4\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}2\\-3\\6\\11\end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\6\end{pmatrix}}_{v_1}, \right\} \subseteq \mathbb{R}^n \tag{161}$$

Aufgabe: Bestimme Basis B des $\mathbb{R}^4$ mit $E \subseteq B$
Lösung: Suche einen Vektor v_4, der linear unabhängig zu v_1, v_2, v_3 ist:
Schreibe dazu die Spalten als Zeilen in eine Matrix und wende elementare Zeilenumformungen an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 6 & 11 \\ -1 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{162}$$

$\Rightarrow$ Die Zeilenstufenform bedeutet, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.
$\Rightarrow$ Die neue Zeile bedeutet, dass v_1, v_2, v_3, e_4 linear unabhängig sind.
Da $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine (vier-)elementige Basis des $\mathbb{R}^4$ ist, ist wegen (5.) und $\{v_1, v_2, v_3, e_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$

13.4 Dimension

:
Ist B eine Basis des K-Vektorraums V, so nennt man

$$|B| = \begin{cases} n, \text{Falls } B \text{ endlich} \\ \infty, \text{Falls } B \text{ nicht endlich} \end{cases} \tag{163}$$

Die Dimension von V. Wegen (5.) ist es egal, welche Basis man wält.
Man schreibt dafür: $dim\, V$.

Beispiele

- $\forall n \in \mathbb{N} : dim\, K^n = n$
- $\forall n, m \in \mathbb{N} : dim\, K^{n \times m} = m \cdot n$
- $dim\, \mathbb{R}[x] = \infty$
- $dim < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >= 2$
- $dim\, \mathbb{R}[x]_2 = 3$

13.4.1 Merkregeln

Für V mit $dim\, V = n$ gilt:

- Je n linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis
- Mehr als n Vektoren sind linear abhängig
- Jedes erzeugende System mit n Elementen bildet eine Basis
- Ist N ein Untervektorraum von V mit $N \subsetneq V$, so gilt $dim\, N < dim\, V$
- Ist N ein Untervektorraum von V mit $dim\, N = dim\, V$, so gilt $N = V$

14 Anwendungen auf Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Zentrale Begriffe Zeilenraum/Zeilenrang, Spaltenraum/Spaltenrang, elementare Spaltenumformungen, Zeilenrang=Spaltenrang

14.1 Zeilen und Spaltenräume von Matrizen

:
Wir betrachten eine $m \times n$-Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit den Spalten $s_1, \dots, s_n \in K^m$ und Zeilen $z_1, \dots, z_m \in K^{1\times n}$:

$$A = (s_1, \dots, s_n) = \begin{pmatrix} z_1 \\ : \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ : & & : \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{164}$$

Wir nennen

- $S_A =< s_1, \dots, s_n >\subseteq K^m$ den Spaltenraum von A und $dim\, S_A$ den Spaltenrang von A
- $Z_A =< z_1, \dots, z_m >\subseteq K^{1\times n}$ den Zeilenraumraum von A und $dim\, S_A$ den Zeilenrang von A

14.2 Darstellung der Spalten und Zeilenräume

$$S_A =< s_1, \dots, s_n >= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i | \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \right\} \tag{165}$$

$$= \left\{ (s_1, \dots, s_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ : \\ \lambda_n \end{pmatrix} | \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \right\} \tag{166}$$

$$= \{ a \cdot v | v \in K^n \} \tag{167}$$

$\Rightarrow S_A = \{Av | v \in K^n\}$
$\Rightarrow Z_A = \{v^T A | v \in K^m\}$ (Analog)

14.3 Bestimmung von Zeilen und Spaltenrang

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ : \\ z_m \end{pmatrix} = (s_1, \dots, s_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ : & & : \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\times n} \tag{168}$$

Wende auf A elementare Zeilenumforumungen an:
$A \to \dots \to \begin{pmatrix} A & \dots & \dots \\ 0 & A & \dots \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} =: A'$
Dabei werden Zeilen von A, die Linear Kombinationen von anderen Zeilen von A schließlich zu Nullzeilen, das heißt:
Zeilenrang von A: $\underbrace{\#}_{Anzahl}$ Zeilen von $A' \neq$ Nullzeile $=$ Rang von A.

Analog kann man auf A elementare Spaltenumformungen (i: Vertauschen von Spalten, ii: Multiplikation von Spalten mit $\lambda \neq, 0$, iii: Addition des λ-fachen einer Spalte zu einer anderen Spalte)

$A \rightarrow \ldots \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ A & A & 0 \\ A & A & A \end{pmatrix} =: A''$

Spaltenrang von $A = \#$ Spalten von A'' $\Rightarrow$Nullspalten

Beispiel :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Zeilenraum/Zeilenrang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Z_A =< (1,1,1),(0,1,3) > \tag{169}$$

$$\text{Zeilenrang von } A{=}2 \tag{170}$$

Spaltenraum/Spaltenrang

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_A =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > \tag{171}$$

$$\text{Spaltenrang von } A = 2 \tag{172}$$

Es gilt:

$$\forall A \in K^{m \times n} : \text{Rang von } A = \text{Zeilenrang von } A = \text{Spaltenrang von } A \tag{173}$$

14.4 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

- Ist $Ax = b$, $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$ ein Lineares Gleichungssystem:
  $Ax = b$ ist lösbar $\Leftrightarrow b \in S_A = \{Av \,|\, v \in K^n\} =< s_1 \ldots, s_n > \Leftrightarrow < s_1 \ldots, s_n > = < s_1 \ldots, s_n, b >$
  Früher:
  $Ax = b$ ist lösbar $\Leftrightarrow rg(A) = rg(A|b)$

- Ist $Ax = 0$, $A \in K^{m \times n}$, ein homogenes Lineares Gleichungssystem, so:

  $$dim\,(Ker\,A) = n - rg\,A \tag{174}$$

  Früher:
  Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des Systems $Ax = 0$: # der frei wählbaren Parameter ist $n - rg\,A$ Im neuen Licht: $L = Ker\,A$ ist ein Untervektorraum von K^m der Diminsion $n - rg\,A$
  Eine Besonderheit bei quadratischen Matrizen $A \in K^{n \times n}$:

  $$dim\,(Ker\,A) = \# \text{ der Nullzeilen in Zeilenstufenform} \tag{175}$$

  In diesem Fall ist nämlich $n = \#$ Ubestimmten $=\#$ Zeilen.

Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{176}$$

$dim\, Ker\, A = n(=3) - rg\, A(=2) = 1$

Es gitl: $Ker\, A =< \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} >$

Das Bestimmen des Kerns einer quadratischen Matrix, d.h, das lösen von Systemen der Art $(A|0)$ mit $A \in K^{n \times n}$, ist wichtig. Daher folgen Beispiele. Da die Nullspalte ($|0)$ sich eh nicht ändert, lassen wir sie weg:

Beispiele :

- $$Ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =< \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} > \tag{177}$$

- $$Ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =< \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} > \tag{178}$$

- $$Ker \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =< \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} > \tag{179}$$

- $$Ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} =< \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > \tag{180}$$

15 Skalarprodukte

Zentrale Begriffe: Bilinearität, Symetrie, positive Definitheit, Skalarprodukt, einheitlicher Vektorraum, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, Hauptminoren, Länge = Norm von Vektoren, Normen, Abstand und Winkel zwischen Vektoren

15.1 Definition Skalarprodukt:

Gegeben ist ein reeller Vektorraum V. Man sagt, eine Abbildung

$$S : \begin{cases} v \times v \Rightarrow \mathbb{R} \\ (c, w) \Rightarrow s(v, w) \end{cases} \tag{181}$$

- ist bilinear, wenn $\forall v, v',\, w, w' \in \mathbb{R},\, \lambda \in \mathbb{R}$
  - $s(\lambda v + v', w) = \lambda s(v, w) + s(v', w)$ "Linearität im 1. Argument"
  - $s(v, \lambda w + w') = \lambda s(v, w) + s(v, w')$ "Linearität im 2. Argument"
- ist symetrisch, wenn $\forall v, w \in V$:
  - $S(v, w) = S(w, v)$

  ist positiv definit, wenn $\forall v \in V$:
  - $S(v, v) \geq 0$ und $S(v, v) = 0 \Rightarrow v = 0$

Eine positiv definite, symetrische, $\underbrace{\text{bilinieare Abb. } S : v \times v \Rightarrow \mathbb{R}}_{\text{Bilinearform}}$ nennt man kurz Skalarprodukt. Anstelle von $S(v, w)$ schreibt man auch $< v, w >$ oder (v, w) oder $v \cdot w$

Beispiel: Aus der Schule bekannt ist das kanonische- oder Standardskalarprodukt:

$$< , >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (v, w) \Rightarrow v^T w \tag{182}$$

- Bilinearität:
  $(\lambda v + v')^T w = (\lambda v^T + v'^T) w = \lambda v^T w + v'^T w =$
  $= \lambda < v, w > + < v', w >$
- Symetrie:
  $v^T w = w^T v \Rightarrow$ Linear im 2. Argument
- positiv definit:
  $v^T v = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2 \geq 0, = 0 \Rightarrow v = 0$

Weitere Beispiele erhalten wir mit positiv definiten Matrizen:
Eine symetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv definit, falls

$$v^T A v \geq 0, \forall\, v \in \mathbb{R}^n,\, v^T A v = 0 \Rightarrow v = 0 \tag{183}$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ ist positiv definit, wenn:

- A ist symetrisch
- Mit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$:

$$v^T A v = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (2v_1 + v_2, v_1 + v_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2v_1^2 + 2v_1 v_2 + 1v_2^2 = \tag{184}$$

$$= (v_1 + v_2)^2 + v_1^2 > 0 \tag{185}$$

Es gilt: Für jede positive definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist:

$$<,>_A: \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) \Rightarrow v^T A w \end{cases} \tag{186}$$

ein (einheitliches) Skalarprodukt

- $<,>_A$ ist bilinear:$(\lambda v + v')^T A w = (\lambda v^T + v'^T) A w = \lambda v^T A w + v'^T A w$
- $<,>_A$ ist symetrisch: $v^T A w = (v^T A w)^T = w^T A^T v = w^T A v =< w, v >_A$
- $<,>_A$ ist positiv definit: $c^T A v > 0, \ \forall v \neq 0$

15.2 Positivitätskriterium für Matrizen

:
Eine symetrische Matrix $A : (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn:

$$|a_1 1| > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 \tag{187}$$

$$\text{Hauptminoren/Hauptdeterminanten} \tag{188}$$

Beispiel :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2 > 0, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \Rightarrow$ A ist positiv definit
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 4 > 0$
  $\Rightarrow$ B ist positiv definit

Weiteres Beispiel für ein Skalarprodukt :
Es sei ein $V = \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der reellen Polynome.
Dann ist $<,>: v \times v \Rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$< p, q > . = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx \tag{189}$$

mit Skalarprodukt:

- $< kp + \tilde{p}, q >= \int_0^1 (\lambda p + \tilde{p})(x)q(x)\,dx = \lambda \int_0^1 p(x)q(x)\,dx + \int_0^1 \tilde{p}(x)q(x)\,dx =$
  $= \lambda < p, q > + < \tilde{p}, q >$
- $< p, q >=< q, p >$
- $< p, p >= \int_0^1 p^2(x)\,dx \geq 0 \Leftrightarrow p = 0$

Beispiel :
$p : 1 + x,\ q : x^2$

$$< p, q >= \int_0^1 x^2 + x^3\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \Big|_0^1 = \frac{7}{12} \tag{190}$$

Bemerkung :
Dieses Beispiel verallgemeinern wir später noch mehr:
V = reeller Vektorraum, aller auf [a,b] stetiger Funktionen:
$f, g \leftarrow V \Rightarrow< f, g >:= \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

15.3 Länge von Vektoren

:
Gegenben: Eine euklidischer Vektorraum V mit einheitlichem Skalarprodukt $<,>$.
Die reelle Zahl $||v|| := \sqrt{< v, v >}$ heißt die Länge (oder die Norm) von $v \in V$

Beispiele

- $<,>_{E_2} : \left|\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right|\right| = \sqrt{(1,1) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{2}$
- $<,>_{\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}} : \left|\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right|\right| = \sqrt{(1,1)\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{5}$
- $\big|\big|p\big|\big|\ ,\ p = 1 + x : \big|\big|1 + x\big|\big| = \sqrt{\int_0^1 x^2 + 2x + 1\,dx} = \sqrt{\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x\big|_0^1} =$
  $= \sqrt{\frac{7}{3}}$

15.4 Die Cauchy-Schwarz Ungleichung

:
Ist $<,>$ ein Skalarprodukt auf V, so gilt $\forall v, w \in V$:

$$\big|< v, w >\big| \leq \big|\big|v\big|\big| \cdot \big|\big|w\big|\big| \tag{191}$$

Beweis :
1. Fall: $w = 0 \Rightarrow$Bewiesen
2. Fall: $w \neq 0 \Rightarrow < w, w > > 0 \Rightarrow \lambda := \frac{<v,v>}{w,w} \in \mathbb{R}$
Es gilt:
$0 \leq \big|\big|c - \lambda w\big|\big|^2 =< v - \lambda w, v - \lambda w >= \big|\big|v\big|\big|^2 + \lambda^2 \big|\big|w\big|\big|^2 - 2\lambda < v, w >=$
$= \big|\big|v\big|\big|^2 + \frac{<v,w>^2}{<w,w>^2} < w, w > -2\frac{<v,w>}{<w,w>} < v, w >=$
$= ||v||^2 + \frac{<v,w>^2}{||w||^2} - 2\frac{<v,w>}{||w||^2}$
$\Rightarrow 0 \leq ||v||^2||w||^2 - < v, w >^2 \Rightarrow | < v, w > | \leq ||v|| \, ||w||$

15.5 Norm

:
Eine Abbildung $N : V \to \mathbb{R}$ (V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum) heißt eine Norm, wenn:

1. $N(v) \geq 0 \ \forall v \in V, \ N(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $N(\lambda v) = (\lambda)N(v) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ v \in V$
3. $(v + w) \leq N(v) + N(w) \ \forall v, w \in V$ (Dreiecksungleichung)

Es gilt:
Ist ¡ , ¿ ein Skalarprodukt auf v, so ist $|| \,.\, || : v \to \mathbb{R}$ eine Norm.
Daher nennt man $||v||$ auch die Norm von v.

Denn :

1. ist wahr wegen der positiven Definitheit von $<,>$
2. $||\lambda v|| = \sqrt{< \lambda v, \lambda v >} = \sqrt{\lambda^2 < v, v >} = ||\lambda|| \, ||v||$
3. $||v + w||^2 =< v + w, v + w >^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2 < v, w > \underbrace{\leq}_{C.S.U}$

   $\leq ||v||^2 + ||w||^2 + 2 \cdot | < v, w > | \leq ||v||^2 + ||w||^2 + 2||v|| \, ||w|| = (||v|| + ||w||)^2$
   $\Rightarrow ||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Beispiel für Normen :

- $V = \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{N}$

  $$\to l_p : v \to \mathbb{R}, v : \begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix} \to \left(|v_1|^P + \ldots + |v_n|^P\right)^{\frac{1}{p}} =: ||v||_p$$

Die l_p-Norm

Fall:

- $p = 1$: $l_1(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} |v_i| =: ||v||_1$
- $p = 2$: $l_2(v) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2} \Rightarrow$ Die euklidische Norm $||v||_2$

- $V = \mathbb{R}^n \Rightarrow l_\infty : v \to \mathbb{R}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix} \to max\{|v_i||i = 1, \dots, n\} =: ||v||_\infty$

  l_∞ =Maximumsnorm

15.6 Abstände zwischen Vektoren

:
In einem euklidischen Vektorraum V mit Skalprodukt $<, >$ nennt man

$$d(v, w) := ||v \cdot w|| = ||w \cdot v||, \;\; v, w \in V \tag{192}$$

den Abstand von v und w.

Beispiel :

$$||e_1 \cdot e_2||_2 = || \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} || = \sqrt{2}, \tag{193}$$

$$||e_1 \cdot e_2||_A = \sqrt{(1, -1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = 1 \tag{194}$$

15.7 Winkel

:
In einem euklidischen Vektorraum V mit Skalarprodukt $<, >$ schließen je zwei Vektoren v und w, $v, w \in V \backslash 0$ einen Winkel ein:

$$\phi = \sphericalangle(v, w) = arccos \underbrace{\frac{< v, w >}{||v|| \cdot ||w||}}_{\in[-1,1] \text{ wegen C.S.U.}} \tag{195}$$

Beachte :
ϕ hängt unbedingt vom betrachteten Skalarprodukt ab!

Beispiel :
$V = \mathbb{R}^2, < . >=< . >_{E_2}$:

$$\sphericalangle\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \tag{196}$$

Beachte :
Zwischen zwei Vektoren v und w gibt es stets zwe winkel. Durch unsere Festlegung wird dabei stets der kleinere Winkel ausgewählt.

16 Orthogonalität

Zueinander senkrechte Vektoren Sind u und v zwei zueinander senkrechte Vektorenr eines R-Vektorraumes mit Skalarprodukt $< .|. >$ (d.h. V ist ein *euklidischer* Vektorraum) so sagt man$v$ steht senkrecht auf w oder v und w sind orthogonal, wenn

$$< v, w >= 0 \quad \rightarrow v \perp w \tag{197}$$

Beispiel:

- $\mathbb{R}^2$mit Standard-SP $< \ , \ >_{E_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, da $< \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >= \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$
- $\mathbb{R}^2$ mit SP $< \ , \ >_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} :< \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >_A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 0 \rightarrow$

  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $0 \perp v \quad \forall \ v \in V, < 0, v >= 0$
- $v, w \neq 0$

Dann:

$$v \perp w \Leftrightarrow \sphericalangle(v, w) = \frac{\pi}{2} := \arccos \frac{< v, w >}{\|v\| \|w\|} \tag{198}$$

$$\rightarrow \sphericalangle(1 + x, x) < p, q >: \int_0^1 p(x) * q(x) dx \rightarrow \arccos \frac{< 1 + x, x >}{\|1 + x\| * \|x\|} = \arccos \frac{\frac{5}{6}}{\sqrt{\frac{7}{9}}} \tag{199}$$

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{3} x^3 |_0^1} = \sqrt{\frac{1}{3}} \tag{200}$$

$$\|1 + x\| = \sqrt{1 + x, 1 + x} \sqrt{\int_0^1 x^2 + 2x + 1 da} = \sqrt{\frac{1}{3} x^3 + x^2 + x|_0^1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tag{201}$$

16.1 Orthogonale Vektoren sind linear unabhängig

Jede Menge paarweise orthogonaler Vektoren $\neq 0$ ist linear unabhängig.

Denn:

$$v, w \in V, v \perp w : \text{ Aus } \lambda v + \mu w = 0 \text{ folgt:} \tag{202}$$

$$< \lambda v + \mu w, v >=< 0, v > \tag{203}$$

$$\lambda \underbrace{< v, v >}_{\neq 0} + \mu \underbrace{< w, v >}_{=0} = 0 \rightarrow \lambda = 0 \rightarrow \mu = 0 \tag{204}$$

16.2 Orthogonale Zerlegung eines Vektors

Gegeben: Element $0 \neq a$ eines euklidischen Vektorraums mit SP $< . . >$
Eine Zerlegung von $v \in V$ in der Form $V = V_a + V_{a^\perp}$ mit $v_a = \lambda a, \lambda \in \mathbb{R}, V_{a^\perp} \perp a$ nennt man orthogonale Zerlegung von v längs a.
Wie findet man v_a und $v_{a^\perp}$?

Es gilt:

$$v = v_a + v_{a^\perp} \text{ mit } v_a = \frac{< v, a >}{< a, a >} * a \text{ und } v_{a^\perp} = v - v_a \tag{205}$$

Denn:

- $v_a + v_{a^\perp} =$
- $a_a = \lambda a$
- $v_{a^\perp} \perp a \rightarrow < v_{a^\perp}, v_a > = < v - a_a, a > = < v, a > - < v_a, a > = < v, a > - < \frac{<v,a>}{<a,a>} a, a > = < v, a > - \frac{<v,a>}{<a,a>} * < a, a > = 0$

Bsp: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2$ mit SSP

$$\Rightarrow v_a = \frac{< v, a >}{< a, a >} * a :< v, a >= 4, < a, a >= 2 \Rightarrow v_a = \frac{4}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{206}$$

$$\Rightarrow v_{a^\perp} : v - v_a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{207}$$

$$v = \mathbb{R}[x], < . >:= \int_0^1 \dots dx \tag{208}$$

$$v : 1 + x, a = x :< v, a >=< 1 + x, x >= \int_0^1 x + x^2 dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3|_0^1 = \frac{5}{6} \tag{209}$$

$$< a, a >=< x, x >= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3|_0^1 = \frac{1}{3} \tag{210}$$

$$\Rightarrow v_a = \frac{< v, a >}{< a, a >} * a = \frac{5}{2}x, v_{a^\perp} = v - v_a : 1 + x - \frac{5}{2}x = 1 - \frac{3}{2}x \Rightarrow V = (\frac{5}{2}x) + (1 + \frac{3}{2}x), \text{ Probe } v_{a^\perp} \perp a \tag{211}$$

$$< 1 - \frac{3}{2}x, x >= \int_0^1 x - \frac{3}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3|_0^1 = 0 \tag{212}$$

16.3 Orthogonal- / Orthonormal-Systeme / Basen

Gegeben: Euklidischer VR V mit SP $< . >$
Eine Menge B von Vektoren von V heißt:

- Orthogonalsystem, wenn $\forall v, w \in B, v \neq w : v \perp w$

- Othogonalbasis, wenn $\forall v, w \in B, v \neq w : v \perp w$ und B ist Basisi von V
- Orthogonalsystem, wenn $\forall v, w \in B, v \neq w : v \perp w$, $\|V\| = 1 \;\; \forall\, v$
- Orthonormalbasis, wenn $\forall v, w \in B, v \neq w : v \perp w$ und B ist Basis

Beachte: Durch *Normieren*, d.h. man ersetzt v durch $\frac{1}{\|v\|} * v$, werden aus orthogonalen Vektoren "orthonormale Vektoren"

Bsp:

$$\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\} \text{ ist orthogonalbasis des } \mathbb{R}^3 \text{ bezüglich SSP} \tag{213}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b_1}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \to \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_2}; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \to \underbrace{\frac{2}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}}_{b_3} \Rightarrow \{b_1, b_2, b_3\} \text{ ist ONB des } \mathbb{R}^3 \tag{214}$$

- $\forall n \in \mathbb{N} : E_n = \{e_1, \ldots e_n\}$ ist ONB des $\mathbb{R}^n$ bezüglich SSP
- *Das Kronecker-Delta*: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Es gilt: $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ ist ONB von $V \Leftrightarrow < b_i, b_j >= \delta_{ij} \;\; \forall_{ij}$

16.4 Darstellung von Vektoren bezüglich ONB:

Ist $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine ONB eines Vektorraums V mit SP $< . >$, so erhält man für ein $v \in V$ die eindeutig bestimmte Darstellung $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\lambda_i =< v, b_i > \quad \forall_i \tag{215}$$

Denn:

$$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n | b_i \Rightarrow < v, b_i >= \lambda_i \underbrace{< b_1, b_i >}_{\delta_{1i}} + \ldots + \lambda_n \underbrace{< b_n, b_i >}_{\delta_{ni}} = \lambda_i \tag{216}$$

Bsp:

$$B = \{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}\mathbb{R}^2 \text{ mit SSP}, v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{217}$$

$$\text{ges. } \lambda_1, \lambda_2 : v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \tag{218}$$

$$\to \lambda_1 =< v, b_1 >=< \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} >= \frac{5}{\sqrt{2}}, \lambda_2 =< v, b_2 >=< \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} >= \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{219}$$

$$\to V = \frac{5}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{220}$$

16.5 Das orthogonale Komplement

U UVR eines euklidischen VRs V mit SP $<,>$
$\rightarrow U^{\perp} := \{v \in V | u \perp u \; \forall u \in U\}$ das orthogonale Komplement zu U.

Bsp:

$$< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} >^{\perp} = < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} >, < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} > \tag{221}$$

Es gilt:

- $U^{\perp}$ ist UVR von V
- $\dim V = n \Rightarrow \dim U^{\perp} = n - \dim U$
- $U \cap U^{\perp} = \{0\}$

16.6 Die orthogonale Projektion

Gegeben: $v \in \mathbb{R}^n$ mit SSP und UVR U von $V = \mathbb{R}^n$
Gesucht : $u \in U, u^{\perp} \in U^{\perp}$ mit $V = u + u^{\perp}$, ges. $\rightarrow u^{\perp} = v - u$
Wir erhalten u durch "Projektion von v auf U":

- Wähle Basis $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$ von u ($\rightarrow u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r$) (ges: $\lambda_1 \ldots \lambda_r$)
- Die Bedingungen $v - u \perp b_i, \ldots v - u \perp b_r$ liefern ein LGS für $\lambda_1, \ldots \lambda_r$:

  Denn: $v - u \perp b_i \Leftrightarrow < v-, b_i >= 0 \Leftrightarrow < v, b_i > - < u, b_i >= 0 \Leftrightarrow < u, b_i >=< v, b_i >$

  Mit $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r :< \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_r b_r, b_i >=< v, b_i >$
  $\Leftrightarrow \lambda_1 < b_1, b_i > + \lambda_2 < b_2, b_i > + \ldots + \lambda_r < b_r, b_i >=< v, b_i > \quad \forall i$
  $\Leftrightarrow (b_1, \ldots b_r)^T (b_1, \ldots b_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = (b_1, \ldots b_r)^T * V$
  $\Leftrightarrow A^T A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A^T v$ "Normalgleichungen"

$\rightarrow$ Löse die Normalgleichung

Bsp:

$$v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \qquad u =< \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} > \tag{222}$$

$$\to A = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}, \tag{223}$$

$$\to A^T A = \begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}, \quad A^T v = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c}2 & 2 & 4\\2 & 3 & 6\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\end{array}\right) \tag{224}$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\end{array}\right) \to \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2 \qquad \Rightarrow u = 0 * b_1 + 2b_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} \tag{225}$$

$$\Rightarrow u^\perp = v - u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \tag{226}$$

17 Ausgleichsrechnung und das Orthonormierungsverfahren von Gram-Schmidt

Zentrale Punkte: ONV von Gram-Schmidt , Normalgleichung, linearesAusgleichsproblem, Metrik der herschen Ornate.. (ob das so stimmt? ;))

Erinnerung: Gegeben: $\mathbb{R}^k$ mit SSP, UVR U von $\mathbb{R}^k$

$$Z = v \in V \forall u \in U, u' \in U^{\perp} \text{ mit } v = u + u' \tag{227}$$

$$\|u'\| = \|v - u\| \leq \|v - w\| \forall w \in U \tag{228}$$

$$\|u'\| = \text{ min. Abstand von v zu U} \tag{229}$$

Der Vektor n ist damit eine Lösung der *"Minimierungsaufgaben"*
Bestimme zu $v \in V$ ein $u \in U$ mit $\|v - u\| = \min$

Wie findet man n? Wähle eine Basis $b_1, \ldots b_r$ von U, U, setze $A := (b_1, \ldots b_r)$ und löse das LGS

$$\underbrace{A^T Ax = A^T v}_{\text{Normalgleichung}} \tag{230}$$

Eine Lösung $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ liefert n:

$$n = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n \tag{231}$$

Das geht ein bisschen allgemeiner: $b_1, \ldots b_n$ muss nur ein Erzeugendensystem von U sein:

Gegeben:

$$v \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times r}, A = (s_1, \ldots s_r), U\{Ax | x \in \mathbb{R}^n\} =< s_1, \ldots s_n > \text{UVR von } \mathbb{R}^n \tag{232}$$

Gesucht:

$$\underbrace{x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v - \underbrace{Ax}_{=u}\| = \min}_{\text{Das lineare Ausgleichsproblem}} \tag{233}$$

Man findet x als Lösung von $\underbrace{A^T A}_{r \times r} x = \underbrace{A^T}_{r \times n} \underbrace{v}_{n \times r}$ (Begründung ähnlich wie in 15.)

Anwendung: Die Metrik der kleinsten Quadrate
Wir machen ein Experiment: Zu den n verschiedenen Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots, t_n$ erhalten wir Werte $y_1, y_2, \ldots y_n$
Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Messwerte "möglichst gut annähert.
Das "Maß" ist:

$$(f(t_1) - y_1^2 + \ldots + (f(t_n) + y_n)^2 \tag{234}$$

$$\text{Setze: } \triangle \begin{pmatrix} f(t_1) - y_1 \\ \vdots \\ f(t_n) - y_n \to \end{pmatrix} \to \|A\|^2 \tag{235}$$

Die Aufgabe lautet: Wähle f so, dass $\|\triangle\|$ minimal wird.
Wir benötigen "Basisfunktionen" $f_1, \ldots f_r$ (diese sind meist vorgegeben)
Bei einer Ausgleich ge.n.:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f_1(n) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{236}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f_2(n) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{237}$$

$$\to \lambda_1 * f_1 + \lambda_2 * f_2 = \lambda_1 + \lambda_2 * x \tag{238}$$

Zu bestimmen sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit $f = \lambda_1 * f_1 + \ldots + \lambda_n * f_n$ erfüllt

$$\|\triangle\|^2 = (f(t_1) - y_1)^2 + \ldots + (f(t_n) - y_n)^2 = \min \tag{239}$$

Anders ausgedrückt:

$$\text{Setze:} A := \begin{pmatrix} f_1(t_1) \ldots f_r(t_1) \\ \vdots \\ f_1(t_n) \ldots f_r(t_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times r}, v := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} : \tag{240}$$

Gesucht ist $x \in \mathbb{R}^r$ mit:

$$\underbrace{\|v - Ax\|}_{=\|\triangle\|} = \min \quad A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_n) \end{pmatrix} \tag{241}$$

Wir wissen bereits, wie wir darraus x finden:

$$A^T A x = A^T v \quad (A \text{ und } v \text{ wie oben}) \tag{242}$$

Beispiel: Gegeben *Stützsteher*:

$$(t_1, b_1) = (-1, 1)(t_2, b_2) = (0, 1)(t_3, b_3) = (1, 2), (t_4, b_4) = (2, 2) \to v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{243}$$

Gesucht: Die "Ausgleichsgerade" (das ist eine "optimale Gerade"):

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = 1 \tag{244}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = x \tag{245}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) \\ \vdots & \vdots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{246}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T v = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{247}$$

$$\to \text{Normalgleichung:} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \lambda_2 = \frac{2}{5}, \lambda_1 = \frac{13}{10} \tag{248}$$

$$\to f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{13}{10} + \frac{2}{5}x \quad \text{ist } \underbrace{\text{lineare}}_{\text{eindeutig}} \text{ Ausgleichsgerade} \tag{249}$$

17.1 Das Orthonormierungsverfahren von Gram-Schmidt

Jeder Vektorraum V hat eine Basis, das wissen wir schon. Hat jeder euklidische VR eine Orthonormalbasis? Nein, aber:

$\boxed{\text{Jeder endlich dimensionale einheitliche VR hat eine ONB}}$

Das Orthonormierungsverfahren von Gram und Schmidt liefert eine Methode, die aus einer beliebigen Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eines endlichen Vektorraums V eine Orthonormalbasis $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ macht. Die Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ erhält man dann wie folgt:

$$b_1 := \frac{1}{\|a_1\|} a_1, b_{k+1} := \frac{1}{C_{k+1}} C_{k+1} \text{ mit } C_{k+1} := a_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < a_{k+1}, b_i > b_i \tag{250}$$

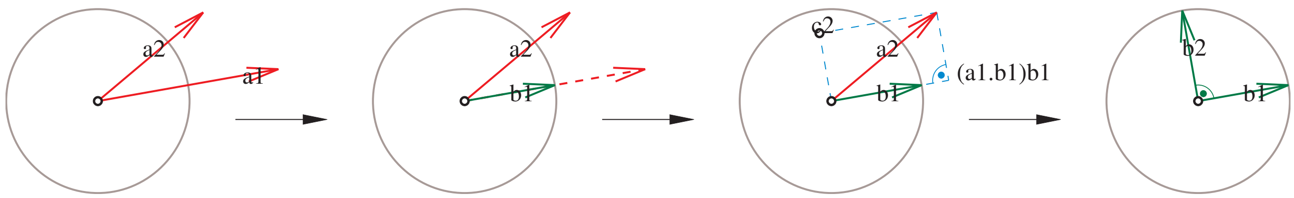
Explizit für die ersten drei b_1, b_2, b_3:

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1 \tag{251}$$

$$b_2 = \frac{1}{\|C_2\|} C_2 \text{ mit } C_2 = a_2 - < a_2, b_1 > b_1 \tag{252}$$

$$b_3 = \frac{1}{\|C_3\|} C_3 \text{ mit } C_3 = a_3 - < a_3, b_1 > b_1 - < a_2, b_2 > b_2 \tag{253}$$

$$\tag{254}$$



Beispiel

$$B = \{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{a_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{a_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{a_3} \} \text{ ist die Basis des } \mathbb{R}^3, SP = SSP \tag{255}$$

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{256}$$

$$b_2 = \frac{1}{\|C_2\|} C_2 \text{ mit } C_2 = a_2 - < a_2, b_1 > b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - 1 * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \to b_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \tag{257}$$

$$b_3 = \frac{1}{\|C_3\|} C_3 \text{ mit } C_3 = a_3 - < a_3, b_1 > b_1 - < a_2, b_2 > b_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - 1 * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 1 * \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \to b_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{258}$$

$$\tag{259}$$

Bemerkung: Im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ findet man durch "scharfes Hinsehen" (oder mit dem Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ meist schon eine ONB.

18 Vektor- und Spatprodukt

18.1 Das Vektorprodukt

dieses Produkt von Vektoren, bei dem wieder ein Vektor entsteht, gibt es nur im $\mathbb{R}(a,b) \in \mathbb{R}^3 \to a \times b \in \mathbb{R}^3$):

Für

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ schreiben wir } a \times L := \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - b_3a_1 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix} \tag{260}$$

das Vektorprodukt von a und b.

Es gilt:

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \langle x|\, a \times b \rangle = \det(x, a, b) \tag{261}$$

Denn:

$$x_1a_2b_3 - x_1b_2a_3 + x_2a_3b_1 - x_2b_3a_1 + x_3a_1b_2 - x_3b_1a_2 \tag{262}$$

18.2 Eigenschaften des Vektorprodukts:

- Der Vektor $a \times b$ steht senkrecht auf a und b
- $\|a \times b\| = \|a\| \, \|b\| \sin \measuredangle(a,b)$ = Fläche des Parallelogramms mit dem Seiten a und b
- Falls a und b linear unabhängig sind, so bilden $a, b, a \times b$ ein Rechtssystem, d.h. $\det(a, b, a \times b) > 0$ (Rechte Hand Regel: a=Daumen, b=Zeigefinger, $a \times b$ = Mittelfinger)
- $a \times a = 0$
- $a \times b = -b \times a$
- $a \times b = 0 \Leftrightarrow a, b$ sind linear abhängig.
- $\|a \times b\|^2 + |\langle a|\, b \rangle|^2 = \|a\|^2 \cdot \|b\|^2$

Denn:

1. $\langle a|\, a \times b \rangle = \det(a, a, b) = 0 = \det(b, a, b) = \langle b|\, a \times b \rangle$
2.

$$\|a \times b\|^2 = \langle a \times b|\, a \times b \rangle = (a_2b_3 - b_2a_3)^2 + (a_3b_1 - b_3a_1)^2 + (a_1^2 - b_1^2)^2 = \ldots = \tag{263}$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \|a\|^2 \, \|b\|^2 - \langle a|\, b \rangle^2 = \tag{264}$$

$$= \|a\|^2 \, \|b\|^2 - (\|a\| \, \|b\| \cos \measuredangle(a,b))^2 = \|a\|^2 \, \|b\|^2 \sin^2 \measuredangle(a,b) \tag{265}$$

3. später
4. siehe Def. ($a = b$)
5. siehe Def.
6. $a \times b = 0 \Leftrightarrow \|a \times b\| = 0 \Leftrightarrow \|a\| \cdot \|b\| \sin \measuredangle(a,b) = 0 \leftrightarrow \sin \measuredangle(a,b) = 0 \leftrightarrow a, b$ linear abh.
7. $\|a \times b\|^2 + |\langle a|\, b\rangle|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 \sin^2 \measuredangle(a,b) + \|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2 \measuredangle(a,b) =$
   $= \|a\|^2 \|b\|^2 (\sin^2 \measuredangle(a,b) + \cos^2 \measuredangle(a,b)) = \|a\|^2 \|b\|^2$

Anwendungen: Gegeben: Dreieck im $\mathbb{R}^3$ mit den Ecken A, B, C

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{266}$$

Gesucht: Fläche F Es gilt:

$$F = \tfrac{1}{2} \|a\| \, \|b\| \sin \measuredangle a, b) = \tfrac{1}{2} \|a \times b\| = \tfrac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \tfrac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 2+3 \\ -2-3 \\ 9-4 \end{pmatrix} \right\| = \tfrac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \tag{267}$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{75} = \tfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \tag{268}$$

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \langle x|\, a \times b\rangle = \det(x, a, b) \tag{269}$$

Gegeben: Ebene $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 | x = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R} \right\}$

Gesucht: Vektor n mit $n \perp E \rightarrow$ Normalenvektor, $||n|| = 1$

Es gilt:

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{270}$$

18.3 Das Spatprodukt

Gegeben: Drei Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ Man nennt:

$$[a, b, c] := \langle a \times b, |\, c\rangle \in \mathbb{R} \tag{271}$$

das *Spatprodukt* von a, b, c

Die Eigenschaften:

1. $[a, b, c] = \det(a, b, c)$
2. $|[a, b, c]| =$ Volumen der von a, b, c aufgespannten Spates (Spat = Parallelepiped)
3. $[a, b, c] = 0 \Leftrightarrow a, b, c$ linear abhängig gilt
4. $[a, b, c] > 0 \Leftrightarrow a, b, c$ bilden ein Rechtssystem
5. $[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b]$ (zyklisches Vertauschen)
6. $[a, b, c] = -[b, a, c]$ (nicht zyklisches vertauschen)

Denn:

1. $[a, b, c] \underbrace{=}_{\text{Def.}} \langle a \times b | c \rangle = \langle c | a \times b \rangle \underbrace{=}_{\text{siehe oben}} \det(c, a, b) = -\det(a, c, b) = \det(a, b, c)$
2. Volumen des Spates: Grundfläche · Höhe
$$\to |[a, b, c]| = \langle a \times b | c \rangle = \underbrace{\|a \times b\|}_{=F} \cdot \underbrace{\|c\| \cdot \cos(a \times b, c)}_{=h} = F \cdot h \tag{272}$$
3. $\{a, b, c\}$ linear abhängig $\Leftrightarrow \det(a, b, c) = 0 \Leftrightarrow [a, b, c] = 0$
4. $\underbrace{[a, b, c]}_{>0} \underbrace{=}_{(i)} \underbrace{\det(a, b, c)}_{>0} \Rightarrow a, b, c =$ Rechtssystem
5. Beachte Determinantenregeln: $[a, b, c] = \det(a, b, c) = \underbrace{-det(b, a, c)}_{-[b,a,c]} = \underbrace{\det(b, c, a)}_{[b,c,a]}$

Anwendung : Volumen eines Tetraeders Wähle a_1, a_2, a_3 (Dreieck) als Grundseite.

$$\Rightarrow \text{Volumen } = \frac{1}{3} \text{Grundfläche} \cdot \underbrace{\text{Höhe}}_{\text{4. Kante des Tetraeders}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} F_{\square} \cdot \text{Höhe}\right) = \frac{1}{6}(|[a, b, c]|) \tag{273}$$

$$\text{mit } a = a_2 - a_1, b = a_3 - a_1, c = a_4 - a_1 \tag{274}$$

Beispiel: $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, a_n = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ Tetraeder

Bestimme das Volumen des Tetraeders:

$$\text{Volumen } = \frac{1}{6}|[a, b, c]| = \frac{1}{6}\left|\left[\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}\right]\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -4 & -2-2 & \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} = \ldots = \frac{8\sqrt{2}}{3} * 2 \tag{275}$$

Nützlich sind oftmals die folenden Identitäten:

$$\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3 : \tag{276}$$

- $u \times (v \times w) = \langle u | w \rangle \cdot v - \langle u | v \rangle \cdot w$ Grassmann- Identität
- $(u \times (v \times w)) + (u \times (w \times u)) + (w \times (u \times v)) = 0$ Jacobi -Identität
- $\langle u \times v | w \times a \rangle = \langle u | w \rangle \langle v | a \rangle - \langle u | a \rangle \langle u | w \rangle$ Lagrange- Identität

19 Folgen

19.1 Was sind Folgen?

Eine reelle Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$
(Eine komplexe Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$)

$$a : \begin{cases} \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} \\ n \to a(n) =: a_n \end{cases} \tag{277}$$

Die Zahlen $a_n, n \in \mathbb{N}$, nennt man die *Folgenglieder* der Folge a.
Kurzschreibweise:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_n)_n =: (a_n) \tag{278}$$

Beispiele

- (a_n) mit $a_n = 2n : (a_N) = (0, 2, 4, 6, 8 \ldots)$
- (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n^2+1} : (a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \ldots)$
- (a_n) mit $(a_n) = (1, -\pi, e^2, \sqrt{2}, \ldots)$

sind *explizite* Folgen

- (a_n) mit $a_0 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 1 : \ a_1 = 4, a_2 = 13, a_3 = 40, \ldots$
- (a_n) mit $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1} : \ a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 8, a_6 = 13, \ldots$

sind *rekursive* Folgen

19.2 Beschränktheit

Eine Folge (a_n) heißt *nach oben beschränkt*, falls:

$$\exists\, K \in \mathbb{R} : \quad a_n \leq K \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \tag{279}$$

Eine Folge (a_n) heißt *nach unten beschränkt*, falls:

$$\exists\, K \in \mathbb{R} : \quad a_n \geq K \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \tag{280}$$

Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt*, falls:

$$\exists K \in \mathbb{R} : \quad |a_n| \leq K \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \tag{281}$$

K nennt man *obere Schranke* oder *untere Schranke*.

Beispiele

$$(a_n) \text{ mit } a_n = (-1)^n \text{ ist beschränkt:} \quad K = 1 \text{ (oben)}\ , \quad K = -1 \text{ (unten)}\ . \tag{282}$$

$$(a_n) \text{ mit } a_n = \frac{2n^2 - 2n + 1}{n^2 - n + 1} \text{ ist beschränkt:} \tag{283}$$

$$n^2 + n^2 - 2n + 1 = n^2 + (n-1)^2 \geq 0 \quad \forall n \tag{284}$$

$$n^2 - n + 1 = (n - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq 0 \Rightarrow \frac{2n^2 - 2n + 1}{n^2 - n + 1} \geq 0 \quad \forall n \tag{285}$$

$$\tag{286}$$

$$\Rightarrow 0 \text{ ist untere Schranke} \tag{287}$$

$$\text{Zur oberen Schranke: } \frac{2n^2 - 2n + 1}{n^2 - n + 1} = \frac{2n^2 - 2n + 2 - 1}{n^2 - n + 1} = \frac{2(n^2 - n + 1) - 1}{n^2 - n + 1} = 2 - \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \leq 2 \tag{288}$$

$$(a_n) \text{ mit } a_0 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n} \tag{289}$$

$$(\rightarrow (a_n) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots) \tag{290}$$

$$\text{Vermutung:} \quad \tfrac{1}{2} \leq a_n \leq 1 \, \forall n : \tag{291}$$

Begründung mit vollständiger Induktion:
IA:

$$n = 0 : \frac{1}{2} \leq a_0 = \frac{1}{2} \leq 1 \tag{292}$$

IB:

$$\text{Für ein } n \in \mathbb{N}_0 : \frac{1}{2} \leq a_n \leq 1 \tag{293}$$

$$\tag{294}$$

IS:

$$\text{Zu zeigen:} \quad \tfrac{1}{2} \leq \underbrace{a_{n+1}}_{0\frac{1}{2-a_n}} \leq 1 : \tag{295}$$

Es gilt:

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \geq -a_n \geq -1 \Rightarrow 2 - \frac{1}{2} \geq 2 - a_n \geq 2 - 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \underbrace{\frac{1}{2 - a_n}}_{a_{n+1}} \leq 1 \tag{296}$$

$$\text{Untere Schranke: } \frac{1}{2} \qquad \text{Obere Schranke: } 1 \tag{297}$$

$$(a_n) \text{ mit } a_n = (-2)^n \text{ ist unbeschränkt.} \tag{298}$$

19.3 Monotonie

Eine Folge (a_n) heißt monoton wachsend/steigend, falls:

$$a_{n+1} \geq a_n \, \forall n \tag{299}$$

Eine Folge (a_n) heißt streng monoton wachsend/steigend, falls:

$$a_{n+1} > a_n \, \forall n \tag{300}$$

Eine Folge (a_n) heißt monoton fallend, falls:

$$a_{n+1} \leq a_n \, \forall n \tag{301}$$

Eine Folge (a_n) heißt streng monoton fallend, falls:

$$a_{n+1} < a_n \, \forall n \tag{302}$$

Im Wesentlichen gibt es 3 Methoden zum Nachweis der Monotonie:

1. $a_{n+1} - a_n \gtreqless (=)0$
2. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \gtreqless (=)1$
3. Vollständige Induktion

Beispiele

- (a_n) mit $a_n = 2n$: Wegen $a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 2n = 2 > 0 \Rightarrow (a_n)$ streng monoton wachsend.
- $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = 1 + \frac{1}{n}$: Wegen $a_{n+1} - a_n = (1 + \frac{1}{n+1}) - (1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \Rightarrow (a_n)$ ist streng monoton fallend.
- (a_n) mit $a_n = 1 + (-1)^n \rightarrow a_0 = 2, a_1 = 0, a_2 = 2 \ldots \Rightarrow (a_n)$ ist weder monoton fallend noch steigend.
- (a_n) mit $a_0 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2-a_n} - a_n = \frac{1-2a_n+a_n^2}{2-a_n} = \frac{(a_n-1)^2}{\underbrace{2-a_n}_{>0}} > 0 \Rightarrow$ Streng monoton wachsend.

19.4 Konvergenz

Man nennt eine Folge (a_n) *Konvergent* mit *Grenzwert* a, falls:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N}_0 : \quad |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N \tag{303}$$

Vorstellung

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \underbrace{a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}}_{\text{dürfen außerhalb der } \epsilon \text{ Umgebung liegen}}, \underbrace{a_N, a_{N+1}, \ldots}_{\text{liegen innerhalb}} \tag{304}$$

Man sagt Fast alle (alle bis auf endlich viele)Folgenglieder liegen in der ϵ Umgebung.
Man sagt dann auch: (a_n) *konvergiert gegen* a, Schreibweise:

$$a_n \overset{n\to\infty}{\to} a, a_n \to a, \lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{305}$$

Folgen, die nicht Konvergieren, nennt man *divergent*
Folgen, die gegen den Grenzwert 0 konvergieren, nennt man *Nullfolgen*

Beispiele

$$(a_n)_{n\geq 1} \text{ mit } a_n = \frac{1}{n} \tag{306}$$

Vermutung:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{307}$$

Zu zeigen:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \, N : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon \, \forall n \geq N \tag{308}$$

$$(\frac{1}{n} < \epsilon \, n > \frac{1}{\epsilon}, N_F[\frac{1}{\epsilon}] = \max\{a \in \epsilon | a \leq \frac{1}{\epsilon}\} \tag{309}$$

$$\Rightarrow N = (\frac{1}{\epsilon} + 1)) \tag{310}$$

Wähle zu $\epsilon > 0$ die Zahl

$$N := [\frac{1}{\epsilon}] + 1 \text{ Dann: } \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \, \forall n \geq N \tag{311}$$

Beispiele:

$$\epsilon = \frac{1}{10} : \left| \frac{1}{n-0} \right| < \epsilon = \frac{1}{10 : N = 11 \to \forall n \geq N : \left| \frac{1}{n-0} > \frac{1}{10} \right|} \tag{312}$$

Es gilt:

- Der Grenzwert a einer Folge (a_n) ist eindeutig.
- Ist (a_n) Konvergent, so ist (a_n) beschränkt
- Ist (a_n) unbeschränkt, so ist (a_n) divergent.
- *Das Monotoniekriterium*: Ist (a_n) beschränkt und monoton, so konvergiert (a_n)
- *Das Cauchy-Kriterium:* Eine Folge (a_n) konvergiert gerade dann, wenn:
  $\forall \epsilon > 0 \, \exists \, N \in \mathbb{N}_0 : |a_n - n_m| < \epsilon \, \forall n, m \geq N$

Beachte $((-1)^n)_n$ ist beschränkt, aber nicht konvergent. $(a_n) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$

Beispiele:

$$(a_n) \text{ mit } a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \rightarrow (a_n) = (\overset{a_1}{1}, \overset{a_2}{1 + \frac{1}{4}}, \overset{a_3}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}}, \ldots) \tag{313}$$

$$(a_n) \text{ ist monoton wachsend: } a_{n+1} - a_n = \sum_{kk=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0 \tag{314}$$

$$(a_n) \text{ ist beschränkt: } 0 = \text{ untere Schranke, Obere Schranke } = 2, \text{ denn:} \tag{315}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + (1 - \frac{1}{n}) \leq 2}_{\Rightarrow (a_n) \text{ konvergiert nach Monotoniekriterium: Grenzwert?}} \tag{316}$$

19.5 Bestimmte Divergenz

Es gibt Folgen, die "über alle Grenzen" wachsen:

$$\forall K \in \mathbb{R}\, \exists N \in \mathbb{N}: \; a_n \geq K \; \forall n \geq N \tag{317}$$

Beispiel:

$$(a_n) \text{ mit } a_n = n^2 \tag{318}$$

Man schreibt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, a_n \overset{n\to\infty}{\rightarrow} \infty, \forall K \in R \exists N \in N : a_n \leq K \forall n \geq N \tag{319}$$

Beispiel

$$(a_n) \text{ mit } a_n = -n \tag{320}$$

Nicht bestimmt divergent:

$$(a_n) \text{ mit } a_n = (-1)^n \tag{321}$$

Merke:

- $a_n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$
- $a_n \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to 0$
- $a_n \to 0, a_n > 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to +\infty$
- $a_n \to 0, a_n < 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to -\infty$

20 Berechnung von Grenzwerten von Folgen

Zur Erinnerung:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{bedeutet: } \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N\,. \tag{322}$$

Zum Glück braucht man die Definition zum Nachweis der Konvergenz einer Folge nur selten, es gibt nämlich die folgenden wichtigen Regeln, mit deren Hilfe man oft die Grenzwerte von Folgen bestimmen kann:

Rechenregeln für konvergente Folgen:
Es seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Dann gilt:

- Die Summenfolge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $a + b$.
- Die Produktfolge $(a_n\, b_n)$ konvergiert gegen $a\, b$
- Falls $b \neq 0$: $\exists\, N:\; b_n \neq 0 \forall\, n \geq N$, und es konvergiert $\frac{a_n}{b_n}$ gegen $\frac{a}{b}$.
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ konvergiert (λa_n) gegen λa.
- Falls $a_n \geq 0 \;\forall\, n$, so konvergiert $(\sqrt{a_n})$ gegen $\sqrt{a}$.
- Die Betragsfolge $(|a_n|)_n$ konvergiert gegen $|a|$.

Beachte: Die Menge $K = \{(a_n) R^{\mathbb{N}_0} \,|\, (a_n) \text{ konvergiert}\,\}$ aller konvergenten Folgen ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ aller Folgen.

Beispiele

- Wegen $\frac{1}{n} \to 0$ gilt: $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0,\; \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n}\frac{1}{n^2} \to 0 \cdot 0 = 0,\; \ldots,\; \frac{1}{n^k} \to 0 \;\forall\, k \in \mathbb{N}$.
- (a_n) mit $a_n = \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0} + \underbrace{(\frac{1}{3})^n}_{\to 0} + 7$, damit gilt $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 7$.
- (a_n) mit $a_n = \frac{3n^2+7n+8}{5n^2-8n+1} = \frac{3+\frac{7}{n}+\frac{8}{n^2}}{5-\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}$, damit gilt $a_n \to \frac{3}{5}$.

  Allgemein:

$$\frac{a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_s n^s + b_{s-1} n^{s-1} + \ldots + b_1 n + b_0} \to \begin{cases} \frac{a_r}{b_s}, & \text{falls } r = s \\ \infty, & \text{falls } r > s \\ 0, & \text{falls } r < s \end{cases} \tag{323}$$

- (a_n) mit $a_n = \sqrt{n^2+3n+3} - n = \frac{(\sqrt{n^2+3n+3}-n)(\sqrt{n^2+3n+3}+n)}{\sqrt{n^2+3n+3}+n} =$
  $= \frac{n^2+3n+3-n^2}{\sqrt{n^2+3n+3}+n} = \frac{3n+3}{\sqrt{n^2+3n+3}+n} = \frac{3+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$.

Gegeben: Zwei konvergente Folgen (a_n) und (b_n) mit $a_n \to a, b_n \to b$

- Gilt $a_n \underbrace{\leq}_{\text{Gilt nicht für } < (!)} b_n \forall n \in \mathbb{N}$, so: $a \leq b$
- Gilt $a = b$ und erfüllt die Folge(en): $a_n \leq C_n \leq b_n$, so: $C_n \to a = b$ *Einschnürungs-Kriterium / Sandwich Theorem*

Beispiele

$$(a_n) \text{ mit } a_n = \frac{n}{2^n} \tag{324}$$

Wir wissen:

$$n^2 \leq 2^n \quad \forall n \geq 4 \text{ siehe Übung} \tag{325}$$

Induktion: IA

$$n = 4: \quad 4^2 \leq 2^4 \tag{326}$$

IB

$$\text{Für ein } n \geq 4: \quad n^2 \leq 2^n \tag{327}$$

IS:

$$\text{(Zu zeigen): } (n+1)^2 \leq 2^{n+1}) : \tag{328}$$
$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 2n + n = n^2 + 3n \leq n^2 * n * n \leq 2 * 2^n = 2^{n+1} \tag{329}$$

Damit:

$$0 \leq \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n^2}, \text{ damit: } 0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n} \tag{330}$$

Gezeigt ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0 \tag{331}$$

Sprechweise: $\frac{a_n}{b_n} \to 0 : b_n$ wächst schneller als a_n

$$(a_n)_{n\geq 1} \text{ mit } a_n = \sqrt[n]{n} (a_1 = 1, a_2 = \sqrt{2} = 1,41\ldots, a_3 = \sqrt[3]{3} = 1,25, \ldots a_{1000} = 1,0069) \tag{332}$$

Vermutung:

$$a \to 1 \text{ Denn: Betrachte } (b_n) \text{ mit } b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \tag{333}$$

Zu zeigen:

$$b_n \to 0, \text{ dann: } a_n \to 1 \tag{334}$$

Es gilt:

$$b_n + 1 = \sqrt[n]{n}, \text{ also: } n = (b_n+1)^n = 1 + nb_n + \frac{n(n-1)}{2}b_n^2 + \underbrace{\ldots}_{\geq 0} \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2}b_n^2 \tag{335}$$

Damit:

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq \underbrace{b_n^2}_{\to 0} \leq \frac{(n-1)}{n(n-1)}2 = \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0} \Rightarrow b_n \to \sqrt{0} = 0 \tag{336}$$

$$\forall q \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 \leq |q| < 1 : (a_n) \text{ mit } a_n = q^n \text{ konvergiert gegen } 0, d.h. \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \tag{337}$$

Wegen

$$\tfrac{1}{|q|^n} = (1 + \tfrac{1-|q|}{|q|})^n \geq 1 + n\tfrac{1-|q|}{|q|} \tag{338}$$

$$0 \leq \underbrace{|q-0|^n}_{\to 0,\text{ d.h. } q^n \to 0} \leq \tfrac{1}{1+n\frac{1-|q|}{|q|}} = \tfrac{|q|}{|q|+n(1-|q|)} \leq \underbrace{\frac{|q|}{1-|q|} * \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}_{\to 0} \tag{339}$$

$$\forall q \in \mathbb{R} : \frac{q^n}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \Rightarrow \text{HA} \tag{340}$$

20.1 Grenzwertbestimmung bei rekursiven Folgen

Beispiele

$$(a_n)_n \text{ mit } a_0 = 1 \text{ und } a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \quad (a_0 = 1, a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots) \tag{341}$$

Angenommen, (a_n) konvergiert gegen ein $a \in \mathbb{R}, a = \lim_{n\to\infty} a_n$.
Dann gilt wegen $\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{a\to\infty} a_{n+1})$

$$\left.\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \sqrt{2a_n} \\ \downarrow n \to \infty & & \downarrow n \to \infty \\ a & & \sqrt{2a} \end{array}\right\} \Rightarrow a = \sqrt{2a}, \text{ also } a = 0 \vee a = 2 \tag{342}$$

Gezeigt ist: Wenn (a_n) konvergiert, $\underbrace{dann}_{\text{Fixpunktgleichung}}$ gegen $a = 0 \vee a = 2$

Wir zeigen: (a_n) konvergiert:

- (a_n) ist beschränkt:

$$a \leq a_n \leq 2 \quad \forall n \tag{343}$$

IA:

$$a_0 = 1 \leq 2 \tag{344}$$

IB:

$$a_n \leq 2 \tag{345}$$

IS:

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} = \sqrt{2} * \sqrt{a_n} \leq \sqrt{2} * \sqrt{2} = 2 \tag{346}$$

- (a_n) ist monoton steigend:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2} * \sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}_n} \underbrace{\geq}_{a_n \leq 2} 1 \tag{347}$$

Monotoniekriterium: (a_n) beschränkt + monoton $\Rightarrow$ (a_n) konvergiert, $\lim a_n = q \vee a = 2$
So geht man meistens vor: Gegeben: (a_n) rekursiv definiert durch Rekursionsformel (mit Startwert)

- Zeige: (a_n) ist beschränkt und monoton
- Stelle die Fixpunktgleichung auf $(a_n \to a, a_{n+1} \to a, \ldots)$
- Bestimme alle Lösungen der Fixpunktgleichungen
- Entscheide, welche Lösungen nicht Grenzwert sein können.

Beispiele: Babylonisches Wurzelziehen:

Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ siehe:

$$(a_n) \text{ mit } a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n}) \text{ mit Startwert } a_0 \in \mathbb{R}_{>0} \tag{348}$$

Es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{x} \tag{349}$$

- Beschränktheit:

$$0 \leq (a_n - \sqrt{x})^2 = a_n^2 - 2a_n\sqrt{x} + x \Rightarrow a_n^2 + x \geq 2a_n\sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n}) \geq \sqrt{x} \tag{350}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : a_{n+1} \geq \sqrt{x} \tag{351}$$

Damit:

$$(a_n)_{n\geq 1}\text{ist nach unten durch } \sqrt{x} \text{ beschränkt} \tag{352}$$

- Monotonie:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n}) - \frac{2}{2}a_n = \frac{1}{2}(\frac{-a_n^2 + x}{a_n}) < 0 \Rightarrow (a_n)_{n\geq 1} \text{ ist monoton fallend.} \tag{353}$$

Insgesamt: (a_n) ist beschränkt + monoton

Fixpunktgleichung

$$a = \frac{1}{2}(a + \frac{x}{a}) \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\frac{x}{a} \tag{354}$$

$$\Rightarrow x = a^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{x} \tag{355}$$

$$-\sqrt{x} \text{ ist nicht möglich, damit: linear } a_n = \sqrt{x} \tag{356}$$

21 Reihen

21.1 Was ist eine Reihe?

Eine Reihe ist keine unendliche Summe.
Eine Reihe ist eine *Folge*: Zu einer reellen Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ betrachten wir eine weitere Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wobei:

$$s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots s_n = a_0 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{357}$$

Diese Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen $s_0, s_1, s_2 \ldots, s_n$ nennt man eine (unendliche) *Reihe*.
Schreibweise:

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}_0} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{358}$$

Beachte $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist *keine* unendliche Summe, sondern eine Folge.

Beispiele

$$(a_k)_{k\geq 1} \text{ mit } a_k = \frac{1}{k} \to (a_k) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) \to s_0 = 1, s_1 = 1 + \frac{1}{2}, s_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ldots s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \tag{359}$$

$$\to (s_n)_{n\geq 1} = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n})_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ - die harmonische Reihe} \tag{360}$$

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \text{mit } a_k = q^k, q \in (-1, 1) \to (a_k) = 1, q, q^2, q^3, \ldots) \tag{361}$$

$$\to s_0 = 1, s_1 = 1 + q, s_2 = 1 + q + q^2, \ldots \ldots s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \tag{362}$$

$$\to (s_n)_{n\geq 0} = (\sum_{k=0}^{n} q^k)_{n\in\mathbb{N}_0} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k - \text{ die geometrische Reihe} \tag{363}$$

Reihen sind spezielle Folgen. Bei Reihen kann man also von Konvergenz und Divergenz sprechen.
Man sagt, die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn die Folge $(s_n)_n = (\sum_{k=0}^{n} a_k)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Man nennt a den *Wert der Reihe*, man schreibt (blöderweise)

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{364}$$

Beispiele: Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k, |q| < 1 \text{ Es gilt: } s_n = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1 - q} \tag{365}$$

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k(k+1)}}_{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}: \quad s_n = \textstyle\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) \tag{366}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 1 \tag{367}$$

$$\tag{368}$$

$$\text{Damit: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \tag{369}$$

Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \text{ divergiert: } s_n = 0+1+4+9+16+\ldots+n^2 \overset{n\to\infty}{\to} \infty \tag{370}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert:} \tag{371}$$

$$s_n = \underbrace{1+\frac{1}{2}}_{\frac{3}{2}} + (\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) + (\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}) + (\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{10}) + \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots) \tag{372}$$

$$\geq \frac{3}{2} + 2*\frac{1}{4} + 4*\frac{1}{8} + 8*\frac{1}{16} + \ldots + 2^k * \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{3}{2} + k*\frac{1}{2} = \frac{k+3}{2} \overset{k\to\infty}{\to} \infty \tag{373}$$

$$\text{Also: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \tag{374}$$

Da Reihen Folgen sind, gelten die Rechenregeln für konvergente Folgen

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen mit Werten a und b, so gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b \tag{375}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda a \tag{376}$$

21.2 Konvergenzkriterien:

21.2.1 Das Cauchy-Kriterium

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N \tag{377}$$

21.2.2 Das Nullfolgen-Kriterium

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert, falls $a_n \not\to 0$

21.2.3 Das Lebniz-Kriterium

Die *alternierende* Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n (= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots)$ konvergiert falls (a_n) eine monoton fallende Nullfolge ist. $(a_n \geq 0)$.

21.2.4 Das Majoranten-Kriterium

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls es eine *konvergente Majorante* gibt, d.h.:

$$\exists \text{ Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ , die konvergiert: } |a_n| \leq b_n \quad \forall n \geq n_0 (\text{ ab einem } n_0 \in \mathbb{N}) \tag{378}$$

21.2.5 Das Minorantenkriterium

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert, falls es eine *divergente Minorante* gibt, d.h. es gibt eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, die divergiert und $0 \leq b_n \leq a_n \;\; \forall\, n \geq n_0$ (ab einem n_0)

Beispiele Die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+7}{5n^2+1} \tag{379}$$

divergiert nach Nullfolgenkriterium.

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \tag{380}$$

(alternierende harmonische Reihe) konveriert nach Leibnitz (gegen $\ln(2) \to$ später)

Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} + 1 \tag{381}$$

konvergiert, denn: $n^2 - n + 1 = n^2 - 2n + 1 + n = (n-1)^2 + n \geq (n-1)^2 \underbrace{\Rightarrow}_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-n+1} \leq \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+1}$ konvergiert

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{382}$$

divergiert, denn:

$$\sqrt{n} \leq n \quad \forall n \Rightarrow \tfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \tfrac{1}{n} \text{ Da } \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} \text{ divergiert, ist } \textstyle\sum \tfrac{1}{n} \text{ eine divergente Minorante} \tag{383}$$

also divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Allgemein

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{Divergiert für } \alpha \leq 1 & (\sum \frac{1}{n} \text{ ist div. Min.}) \\ \text{Konvergiert für } \alpha > 1 & (\text{HA}) \end{cases} \tag{384}$$

Beispiel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\pi^n} = 3(\frac{1}{1-\frac{1}{\pi}} - 1) \tag{385}$$

22 Absolute Konvergenz von Reihen

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Es gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Beispiel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \tag{386}$$

konvergiert, konvergiert aber nicht absolut, denn:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{divergiert}} \tag{387}$$

Solche Reihen nennt man bedingt konvergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{388}$$

konvergiert absolut.
allgemeiner:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert } a_n \geq 0 \quad \forall n \Rightarrow \sum a_n \text{ konvergiert absolut} \tag{389}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \tag{390}$$

konvergiert absolut

22.1 Regeln für absolut konvergente Reihen

$\sum a_n$ konvergiere absolut:

- Es gilt die Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \tag{391}$$

- Beliebige "Umordnungen" der "Summanden" haben den selben Wert
- Das *Cauchy-Produkt*: Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *absolut* konvergente Reihen, so konvergiert auch ihr Cauchy-Produkt $\sum_{n=}^{\infty} a_n$ absolut:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} : (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \tag{392}$$

$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots) = \underbrace{(a_0 b_0)}_{C_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{C_1} + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{C_3} + \ldots \tag{393}$$

Wert:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) \tag{394}$$

22.2 Kriterien für absolute Konvergenz

Das Majoranten-Kriterium: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, falls es eine konvergente Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gibt, d.h.

$$\exists N : \quad |a_n| \leq b_n \quad \forall n \geq N \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konvergiert} \tag{395}$$

Das Quotienten-Kriterium Gegeben: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:
Falls:

$$\rho := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ existiert, so:} \tag{396}$$

$$\text{Im Fall} \begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut} \\ \rho > 1 \Rightarrow \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert} \\ \rho = 1 \Rightarrow \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ keine Aussage möglich} \end{cases} \tag{397}$$

Das Wurzelkriterum Gegeben $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$: Falls $\rho \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert, so:

$$\text{Im Fall:} \begin{cases} \rho < 1 \Rightarrow \; \sum a_n \text{ konvergiert absolut} \\ \rho > 1 \Rightarrow \; \sum a_n \text{ divergiert} \\ \rho = 1 \Rightarrow \; \sum a_n \text{ keine Aussage möglich} \end{cases} \tag{398}$$

Beispiele Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin\sqrt{n}}{n^{5/2}} \tag{399}$$

konvergiert absolut nach Majorantenkriterium:

$$\left|(-1)^n \frac{\sin\sqrt{n}}{n^{5/2}}\right| \leq \frac{1}{n^{5/2}} \leq \frac{1}{n^2} \tag{400}$$

Da $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert, ist dies eine konvergierende Majorane für $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin\sqrt{n}}{n^{5/2}}$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ konvergiert absolut:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1 \tag{401}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{3^n} = 3 * (\frac{n}{n+1})^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3 > 1 \tag{402}$$

Divergiert

Die Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}: \quad \text{Quotientenkriterium: } \tfrac{1}{n+1} * n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{403}$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}:}_{\text{konvergiert (gegen } \frac{\pi^2}{6})} \qquad \text{Quotientenkriterium: } \tfrac{1}{(n+1)^2} * n^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \tag{404}$$

konvergieren

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{n}})^n = \sqrt[n]{\left|\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right|^n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} < 1 \tag{405}$$

konvergiert absolut

22.3 Die Exponentialreihe

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolut. Man nennt diese Reihe die *Exponentialreihe* und schreibt

$$\exp(x)(= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}) \tag{406}$$

für den Wert der Reihe.

Damit erhalten wir eine Funktion:

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \exp(x) \end{cases} \tag{407}$$

die *Exponentialfunktion* , kurz *e-Funktion*

Denn: Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} * \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{408}$$

Es gilt die folgende Abschätzung des Restgliedes:

$$R_{N+1}(x) = \sum_{n=0}^{a} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \tag{409}$$

Es gilt:

$$|R_{N+1}(x)| \leq 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \forall x \text{ mit } |x| \leq \tfrac{N+2}{2} \tag{410}$$

Denn:

$$|R_{N+1}(x)| = \left|\sum^{1} \infty_{n=N+1} \frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} + \frac{|x|^{N+2}}{(N+2)!} + \frac{|x|^{N+3}}{(N+3)!} + \ldots =$$
$$\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \ldots) \leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots) = \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} * 2$$

Aufgabe: Bestimme $\exp(1)$ mit einem Fehler $\leq 10^{-6} = R_{N+1}(1) = \frac{2}{(N+1)!}$

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \not{.}.. \tag{411}$$

22.3.1 Eigenschaften der e-Funktion

- Die eulersche Zahl $e = \exp(1) = 2,7182818284\ldots$
- Die Funktionalgleichung:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad \exp(x+y) = \exp(x) * \exp(y) \tag{412}$$

-
  - $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
  - $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0$
  - $\forall a \in \mathbb{Q} : \exp(a) = e^a$

Denn: Cauchy-Produkt:

$$\underbrace{\sum \frac{x^n}{n!}}_{\exp(x)}, \underbrace{\sum \frac{y^n}{n!}}_{\exp(y)} \text{ konvergiert absolut } \Rightarrow (\sum \frac{x^n}{n!})(\sum \frac{y^n}{n!}) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{c_n}_{\frac{(x+y)^n}{n!}} \text{ mit } c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} * \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \tag{413}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Eigenschaften:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x-x) = \exp(0) = \exp(x)\exp(-x) = 1 \Rightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \textbf{??} \tag{414}$$

$$\begin{aligned} x \geq 0 : &\quad \exp(x) = 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \ldots > 0 \\ x < 0 : &\quad -x > 0 \Rightarrow \exp(-x) > 0 \Rightarrow \exp(x) = \tfrac{1}{\exp(-x)} > 0 \end{aligned} \tag{415}$$

$$\begin{aligned} \exp(1) = e, \exp(2) = \exp(1+1) = (\exp(1))^2, \exp(3) = \exp(2+1) = e^2 * e^1 = e^3 \ldots \text{Induktion} \\ \textbf{??} \Rightarrow \exp(-n) = \frac{1}{e^n} \forall n \in \mathbb{N} \\ a = \frac{1}{q} = \exp(1) = \exp(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}) = \exp(\frac{1}{q})^q \Rightarrow \exp(\frac{1}{q}) = e^{\frac{1}{q}} \\ a = \frac{p}{q} \Rightarrow \exp(\frac{p}{q}) = \exp(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}) = \exp(\frac{1}{q})^p = (e^{\frac{1}{q}})^p = e^{\frac{p}{q}} \end{aligned} \tag{416}$$

23 Funktionen

Sind D und W (beliebige) Mengen, so nennen wir eine "Zuordnung", die *jedem* Element aus D genau ein Element aus W zuordnet, eine *Abbildung* f von D in W.
Schreibweise:

$$f:\begin{cases} D\to W \\ x\to y=f(x)\end{cases} \qquad \text{oder } f:D\to W, x\to y=f(x) \tag{417}$$

Sind D und W Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$, so spricht man auch von *Funktionen.*
Man nennt:

- D die *Definitionsmenge* bzw. Definitionsbereich
- W die *Wertemenge* bzw. Wertebereich
- "$f(x)=y$" die *Abbildungsvorschrift* (falls bekannt)
- $f(D)=\{f(x)|x\in D\}$ das *Bild* von f, es gilt $f(D)\subseteq W$
- Graph$(f)=\{(x,f(x))|x\in D\}\subseteq D\times W$ den *Graph von f*
- $f:\underbrace{[1,1]}_{D}\to\underbrace{\mathbb{R}}_{W}, x\to x^2$, d.h. $f(x)=x^2$ $f(D)=[0,1]$, Graph$(f)\to SKIZZE$
- $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x^2,\ 0\le x<1 \\ 2,\ x=1 \\ x-1,\ 1<x\le 2\end{cases} \quad , f(D)=SKIZZE$

23.1 Verkettung von Funktionen

Sind $f:D\to W$ und $g:W\to Z$ zwei Funktionen, so nennt man

$$g\circ g:\begin{cases} D\to Z \\ x\to g\circ f(x):=g(f(x))\end{cases} \tag{418}$$

die *Verkettung* oder *Komposition* oder die *Hintereinanderausführung* von f und g

$$\to SKIZZE$$

Beachte: Das Bild von f muss in der Definitionsmenge von g liegen

Beispiel:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=e^x \tag{419}$$

$$\Rightarrow\ g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g\circ f(x)=g(f(x))=g(x^2)=e^{x^2}\overset{x=1}{\to} e \tag{420}$$

$$\Rightarrow\ f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\circ g(x)=f(g(x))=f(e^x)=e^{2x}\overset{x=1}{\to} e^2 \tag{421}$$

Beachte: Im Allgemeinen:

$$f \circ g \neq g \circ f \tag{422}$$

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{-1}{x}, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x} \tag{423}$$

$$\Rightarrow\ f \circ g : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{-1}{\sqrt{x}} \tag{424}$$

$$\Rightarrow\ g \circ f \text{ existiert nicht: } g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{-1}{x}\right) = \sqrt{\frac{-1}{x}}, \quad x > 0 \ \lightning \tag{425}$$

23.2 Injektiv, surjektiv, bijektiv

Eine Funktion (allgemein auch Abbildung) $f : D \to W$ heißt

- *injektiv*, falls aus $f(x_1) = f(x_2), x_1, x_2 \in D$ folgt $x_1 = x_2$
- *subjektiv*, falls es zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ gibt mit $f(x) = y$
- *bijektiv*, falls f injektiv und subjektiv ist.

Das heißt:

f injektiv	$\Leftrightarrow$	$x_1 \neq x_2 \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow$	f hat lauter verschiedene Werte
$f$surjektiv	$\Leftrightarrow$	$\forall y \in W \exists x \in D : f(x) = y \Leftrightarrow f(D) = W \Leftrightarrow$	Der Wertevorrat wird ausgeschöpft

Beispiele:

$$\to SKIZZE \tag{426}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$	nicht surjektiv	$\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = -1$ und injektiv $f(-1) = f(1), 1 \neq -1$
$f : \mathbb{R} \to R_{\geq 0}, f(x) = x^2$	surjektiv:	$\forall y \geq 0 \exists x = \sqrt{y}$ mit $f(x) = y, n$ nicht injektiv (s.o)
$f : \mathbb{R} \to R_{\geq 0}, f(x) = x^2$	injektiv:	$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow\ x_1^1 = x_1^2 \Rightarrow\ x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$
$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to R_{\geq 0}, f(x) = x^2$	nicht surjektiv:	$\nexists x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$

Bemerkung: ist $f : D \to W$ injektiv, so ist $f : D \to f(D)$ bijektiv

Umkehrfunktion Genau die bijektiven Funktionen sind "umkehrbar".

Ist $f : D \to W$ bijektiv, so gibt es zu jedem $y \in W$ genau ein $x \in D$ mit $f(x) = y$, das liefert eine Abbildung $g : W \to D : y \to$ das x mit $f(x) = y$

Es gilt:

$$f \circ g : W \to W, \quad f \circ g(y) = f(g(y)) = y \tag{427}$$
$$g \circ f : D \to D, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = x \tag{428}$$

D.h.

$$f \circ g = Id_W : \begin{cases} W \to W \\ y \to y \end{cases} \tag{429}$$
$$g \circ f = Id_D : \begin{cases} W \to W \\ x \to x \end{cases} \tag{430}$$

Man nennt f *umkehrbar* , g die *Umkehrfunktion* von f und schreibt $g = f^{-1}$

Beachte: f^{-1} existiert nur für bijektives f

Beispiel

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2 \text{ ist bijektiv } f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f^{-1}(x) = \sqrt{x} \begin{pmatrix} f_0 f^{-1}(x) = f\sqrt{x} = \sqrt{x}^2 = x \\ f_0^{-1} f(x) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x \end{pmatrix} \tag{431}$$

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} \text{ist bijektiv (später) }, \ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \text{ ist Umkehrfunktion} \tag{432}$$
$$\exp(\ln(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_{>0} \tag{433}$$
$$\ln(\exp(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{434}$$

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to R_{\frac{1}{2}}, f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} : f \text{ ist injektiv: } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \Rightarrow \frac{1}{x_1^2} = \frac{1}{x_1^2} \tag{435}$$
$$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

f ist subjektiv: Gegeben $y \in \mathbb{R}_{>\frac{1}{2}}$ Betrachte:

$$x = \frac{1}{\sqrt{4y^2 - 1}} \in \mathbb{R}_{>0} \tag{436}$$

Es gilt:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{4y^2-1}}\right)^2}} = \frac{1}{2} * \sqrt{1 + 4y^2 - 1} = y \tag{437}$$

Damit:

$$f^{-1} : \mathbb{R}_{>\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}_{>0}, f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 - 1}} \tag{438}$$

23.3 Bestimmen von Umkehrfunktionen

Oftmals geht das gar nicht. Falls es geht, so meistens auf die folgende Art: Bestimme zu $y \in W$ ein $x \in D$ mit $f(x) = y$:

- Löse die Gleichung $f(x) = y$ nach x auf: $x = g(y)$
- Setze $y = x$ ung $g = f^{-1}$

Beispiele;

$$f : \mathbb{R} \to , f(x) = x \tag{439}$$
$$f(x) = y \Leftrightarrow x = y = g(y) \tag{440}$$
$$y = x \text{ und } f^{-1} = g \tag{441}$$
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(x) = x \tag{442}$$

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2 \tag{443}$$
$$f(x) = y \leftrightarrow x^2 = y \Rightarrow \ x\sqrt{y} = g(y) \tag{444}$$
$$f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f^{-1}(x) = \sqrt{x} \tag{445}$$

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0,5}, f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \tag{446}$$
$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = y \Rightarrow \ \frac{1}{x^2} = 4y^2 - 1 \Rightarrow \ x = \sqrt{\frac{1}{4y^2 - 1}} \tag{447}$$
$$f^{-1} : \mathbb{R}_{>0,5} \to \mathbb{R}_{>0}, f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{4x^2 - 1}} \tag{448}$$

24 Beschränkte, monotone Funktionen und Grenzwerte von Funktionen

24.1 Beschränkte Funktionen

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt:

- nach oben beschränkt, falls $\exists \underbrace{K}_{\text{obere Schranke}} \in \mathbb{R} : f(x) \leq K \forall x \in D$
- nach unten beschränkt, falls $\exists \underbrace{K}_{\text{untere Schranke}} \in \mathbb{R} : f(x) \geq K \forall x \in D$
- beschränkt, falls $\exists K \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq K \forall x \in D$

Das heißt der Graph von f verläuft unterhalb / oberhalb / zwischen horizontalen Linien.
$\rightarrow SKIZZE$

24.2 Monotone Funktionen

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt:

- monoton wachsend/steigend, falls $\forall x, y \in D$ mit $x < y : f(x) \leq f(y)$
- streng monoton wachsend/steigend, falls $\forall x, y \in D$ mit $x < y : f(x) < f(y)$
- monoton fallend, falls $\forall x, y \in D$ mit $x < y : f(x) \geq f(y)$
- streng monoton fallend, falls $\forall x, y \in D$ mit $x < y : f(x) > f(y)$

Beispiele: Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 \tag{449}$$

ist monoton wachsend und monoton fallend.

Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \tag{450}$$

ist streng monoton wachsend, denn:

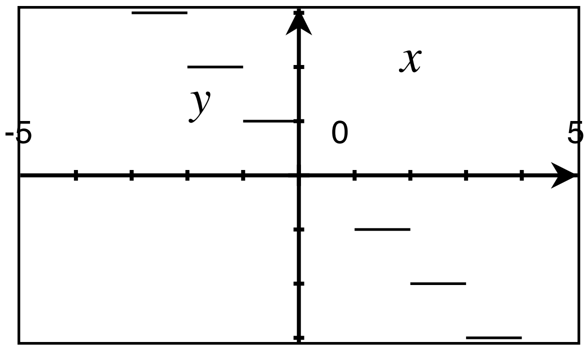
$$x < y \Rightarrow y^2 - x^2 = \underbrace{(y - x)}_{>0} \underbrace{(y + x)}_{>0} \tag{451}$$

Die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = - \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{=\max\{a \in \epsilon | a \leq x\}} \tag{452}$$

ist monoton fallend, denn:

$$x < y \Rightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor \to - \lfloor x \rfloor \geq - \lfloor y \rfloor \tag{453}$$



Ist $f : D \to W$ streng monoton, so ist f injektiv

Denn:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y \quad \text{da: } x < y \Rightarrow \lightning \quad x > y \Rightarrow \lightning \tag{454}$$

Vorsicht: Die Umkehrung fielt nicht: $\to SKIZZE$

Folgerung: Ist $f : D \to W$ streng monoton, so ist $f : D \to f(D)$ umkehrbar: $\exists f^{-1} : f(D) \to D$

24.3 Grenzwerte von Funktionen

Beobachtung: Gegeben: Folge $(a_n)_n$ mit $a_n \in D, f : D \to W$.
Dann: $(f(a_n))_n$ ist wieder eine Folge.

Beispiel

$$(a_n) \text{ mit } a_n = \frac{1}{n^2+1}, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \exp(\sin x) \Rightarrow f(a_n) = \exp(\frac{1}{\sin n^2 + 1}) \Rightarrow (f(a_n)) = (\exp(\frac{1}{n^2+1})_n \tag{455}$$

Für $a, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sagt man:

Die Funktion : $D \to W$ hat in a den Grenzwert c, falls für jede Folge (a_n) mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ mit $a_n \in D \; \forall n \in \mathbb{N}$, die Folge $\big(f(a_)\big)_n$ gegen c konvergiert, man schreibt dafür:

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \tag{456}$$

das heißt:

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \quad :\Leftrightarrow \forall (a_n) \text{ mit } \lim_{n\to\infty} = a \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = c \tag{457}$$

Beispiele:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + 1 \tag{458}$$

$$a = 0 : \quad \lim_{x\to 0} f(x) = ? \tag{459}$$

Es sei (a_n) eine (beliebige) Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Dann

$$f(a_n) = a_n^2 + 1 \overset{n\to\infty}{\to} 1, \text{ damit: } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1 \tag{460}$$

Damit:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \tag{461}$$

$$a = \infty : \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = ? \tag{462}$$

Es sei (a_n) eine Folge mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \tag{463}$$

Dann:

$$f(a_n) = a_n^2 + 1 \overset{n\to\infty}{\to} \infty \tag{464}$$

damit

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \tag{465}$$

$$f : (0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tfrac{1}{x} \tag{466}$$

$$a = 1 : \quad \forall (a_n) \text{ mit } a_n \to 1 : \quad (f(a_n)) = \left(\frac{1}{a}\right) \to 1 : \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1 \tag{467}$$

$$a = 0 : \quad \forall (a_n) \text{ mit } a_n \to 0 : \quad (f(a_n)) = \left(\frac{1}{a}\right) \to \infty : \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty \tag{468}$$

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\lfloor x\rfloor, a=0 \tag{469}$$

$$\forall(a_n) \text{ mit } a_n\to 0 \text{ und } a_n\geq 0: \quad f(a_n)=0 \quad \forall n\geq n_0 \text{ , das heißt } \lim_{n\to\infty} f(a_n)=0 \tag{470}$$

$$\forall(a_n) \text{ mit } a_n\to 0 \text{ und } a_n< 0: \quad f(a_n)=-1 \quad \forall n\geq n_1 \text{ , das heißt } \lim_{n\to\infty} f(a_n)=-1 \tag{471}$$

Damit gilt:

$$\nexists c\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \text{ mit } \lim f(a_n)=c \quad \forall(a_n) \text{ mit } a_n\to 0 \tag{472}$$

das heißt der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\to \text{ mit L'Hospital (später)} \tag{473}$$

24.4 Rechenregeln für Grenzwerte

Es gelte:

$$\lim_{x\to a} f(x)=c \tag{474}$$

$$\lim_{x\to a} g(x)=d \tag{475}$$

Dann:

$$\lim_{x\to a}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha c*\beta d \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R} \tag{476}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=c*d \tag{477}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{c}{d},\quad d\neq 0 \tag{478}$$

Beispiele

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 + x + 12} = \frac{13}{18} \tag{479}$$

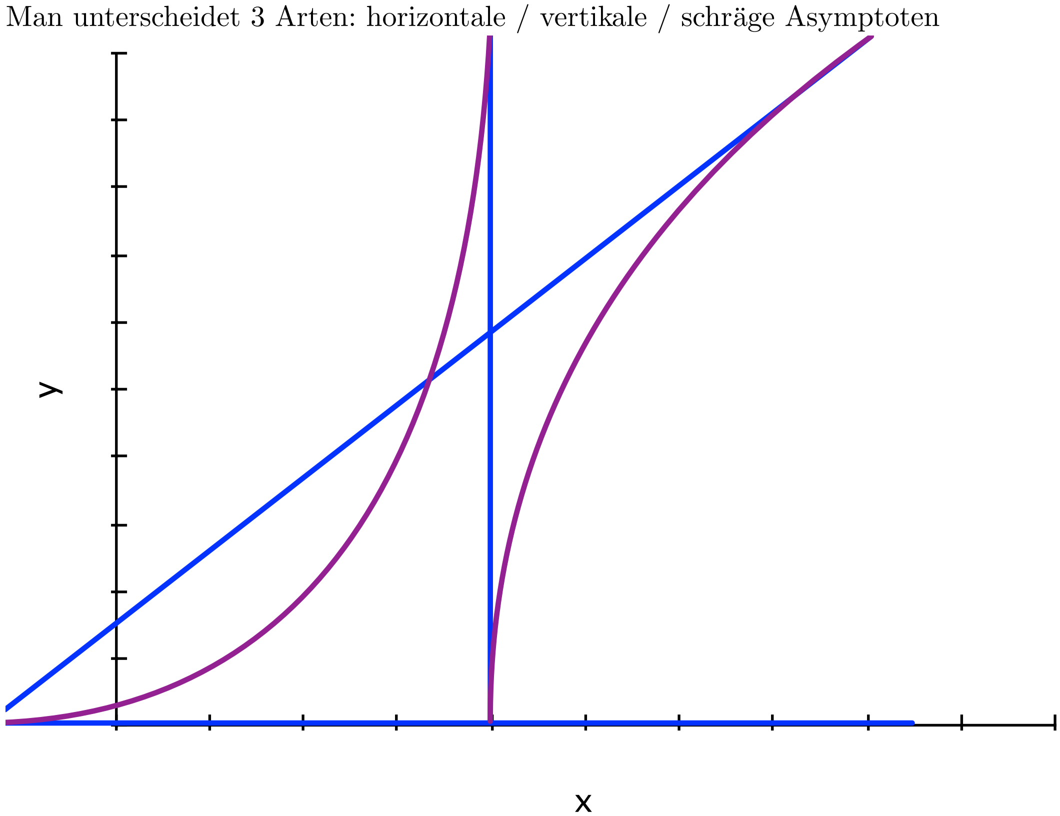
$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 + x + 12} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{12}{x^2}} = 2 \tag{480}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x^2 + x + 1 = 3 \tag{481}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - 1}{x\left(\sqrt{1 + x} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1 + x} + 1} = \frac{1}{2} \tag{482}$$

24.5 Asymptoten

Man unterscheidet 3 Arten: horizontale / vertikale / schräge Asymptoten



Wie findet man Asymptoten?

Horitontale Asymptoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = c? \tag{483}$$

Vertikale Asymptoten:

$$\exists \text{ Nullstelle } a \text{ des Nenners } : \lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty \tag{484}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = c :\Leftrightarrow \forall (a_n) \text{ mit } a_n \to a : f(a_n) \to c \tag{485}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = c :\Leftrightarrow \forall (a_n) \text{ mit } a_n > a : f(a_n) \to c \tag{486}$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = c :\Leftrightarrow \forall (a_n) \text{ mit } a_n < a : f(a_n) \to c \tag{487}$$

Schräge Asymptote:

$$\left(f(x) = ax + b \to \frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} \right) : a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \to b = \lim_{b \to \pm\infty} ((fx) - ax) \tag{488}$$

Beispiel

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}. \quad f(x) = \tfrac{x^2}{(x-1)^2} \tag{489}$$

Horizontale Asymptote:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{(x-1^2} = \pm\infty \to \nexists \text{ horizontale Asymptote} \tag{490}$$

Vertikale Asymptote

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \tag{491}$$

Schräge Asymptoten:

$$\lim_{x \to +\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 = a, \tag{492}$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - 1 * x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + \ldots}{(x-1)^2} = 2 \tag{493}$$

schräge Asymptote bei $y = X + 2$

25 Stetigkeit

Erinnerung $\lim\limits_{x \Rightarrow A} f(x) = c : \leftrightarrow \forall (a_n)$ mit $a_n \to a : F(a_n) \to c$

Beispiel

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1, a = 1 : (a_n) \text{ mit } a_n \to 1 : f(a_n) = a_n^2 + 1 \overbrace{\to}^{n \to \infty} 2 \tag{494}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + 1) = 2 = f(1) \tag{495}$$

Eine Funktion $f_D \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $a \in D$ stetig, falls:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{496}$$

Das kann man schreiben als:

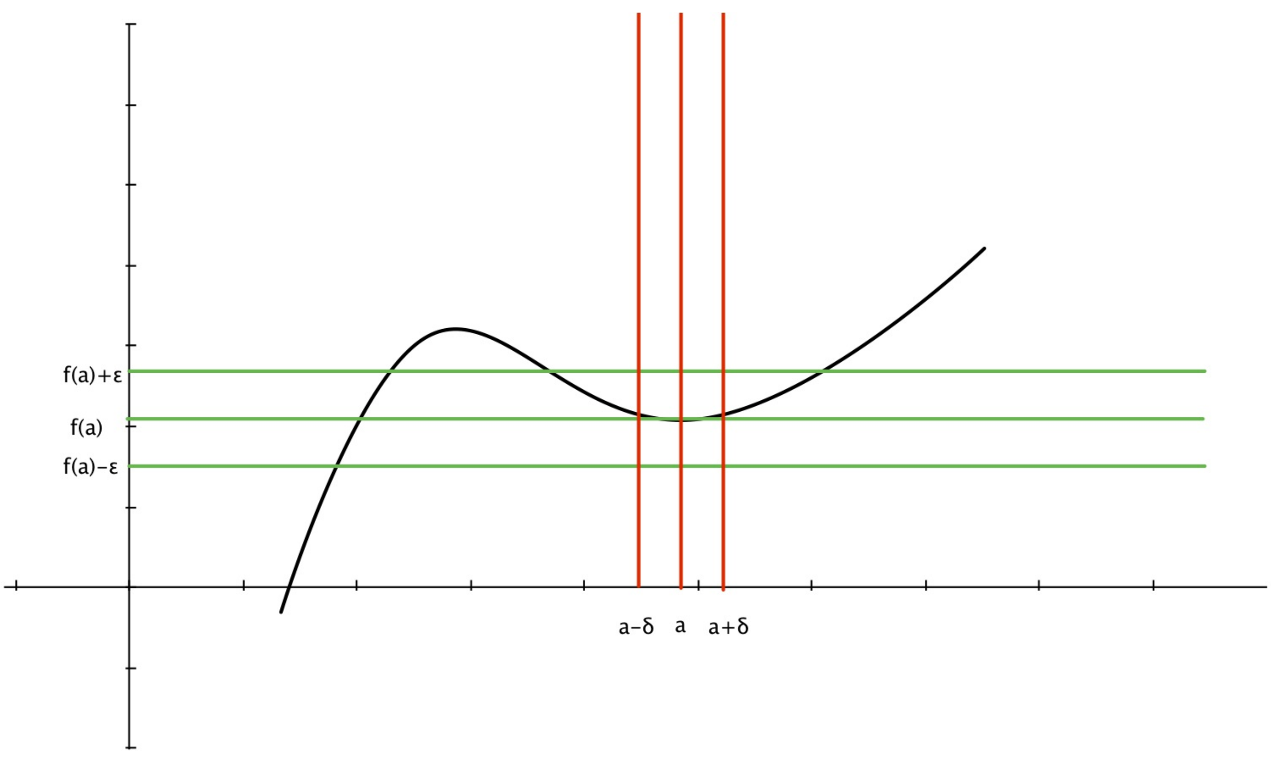
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x) \tag{497}$$

Es gilt das folgende Kriterium:

25.1 Das ϵ-δ-Kriterium

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $a \in D$ stetig, falls:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |f(x) - f(a)| < \epsilon \; \forall x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta \tag{498}$$



"kleine Änderungen im Argument haben nur kleine Änderunugen bei den Funktionswerten zur Folge."
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf D stetig, falls f in allen $a \in D$ stetig ist.

Es gilt: Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig, so auch

$$\alpha f + \beta g, f \cdot g, \frac{f}{g}, f \circ g \tag{499}$$

Stetig sind also: Polynome, rationale Funktionen, exp, ln, sin, cos
Nicht stetig sind: Treppenfunktionen, Funktionen mit "Sprüngen"
Vorstellung von Stetigkeit:"Man kann den Graph einer stetigen Funktion zeichnen, ohne mit dem Stift abzusetzten."
Vorsicht:$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig!

25.2 Stetige Fortsetzbarkeit

zum Beispiel:

$$f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} \text{ ist stetig auf } \mathbb{R}\backslash\{1\} \tag{500}$$

Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$ ist stetig auf $\mathbb{R}$,und es gilt: $g = f$ auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Wir haben f stetig auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

25.3 Wichtige Sätze zu stetigen Funktionen

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f ist beschränkt.
2. Satz vom Max und Min:
   $f[a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \exists x_{max} x_{min} \in [a, b]$ mit $\underbrace{f(x_{min})}_{=f_{min}} \leq f(x) \leq \underbrace{f(x_{max})}_{=f_{max}} \forall x \in [a, b]$
3. Zwischenwertsatz:
   $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \forall c \in [f_{min}, f_{max}]$ $\exists x \in [a, b]$ mit $\forall x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$
4. $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $I = Intervall \Rightarrow f(I) = Intervall$

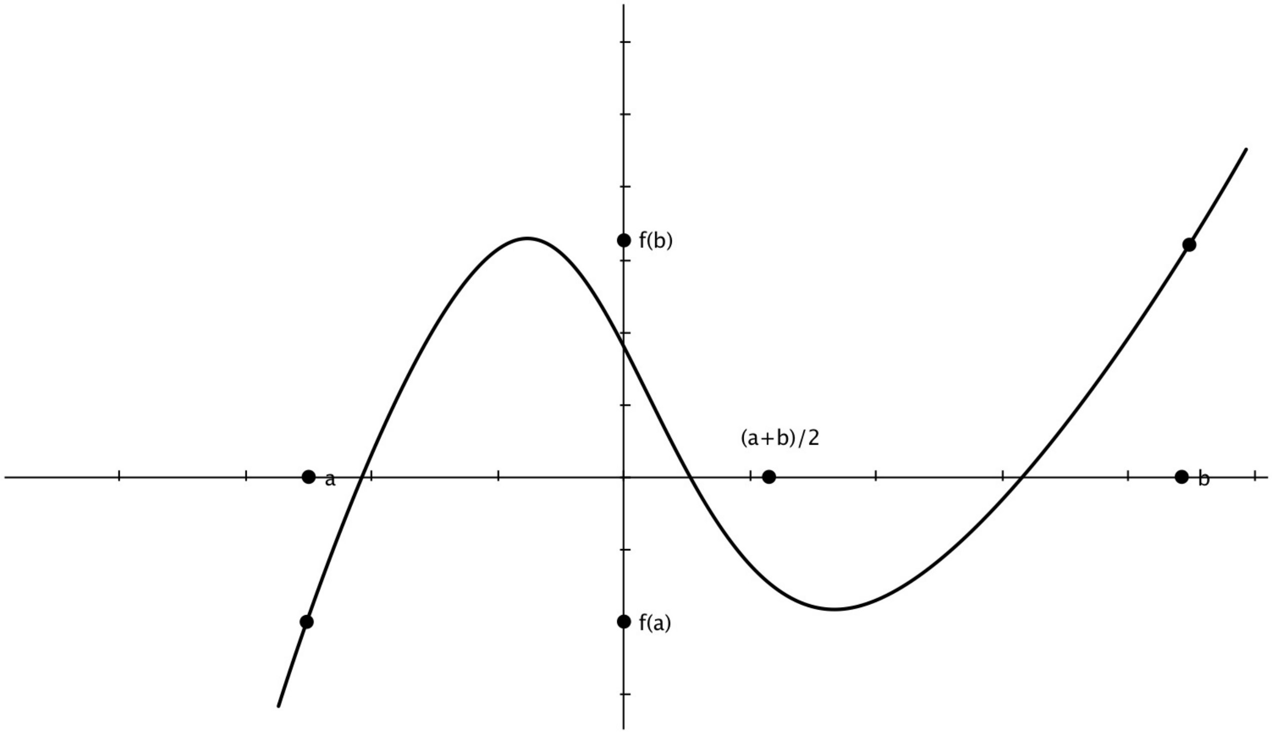
Der Nullstellensatz ist ein Spezialfall des Zwischenwertsatztes (ZWS):
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig in $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder umgekehrt) so gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$
Eine Methode eine Nullstelle näherungsweise zu finden liefert das Bisektionsverfahren.

25.4 Das Bisektionsverfahren(=Intervallhalbierungsmethode)

Gegeben: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$ (oder umgekehrt) Gesucht: x mit $f(x) = 0$

- Wähle Mittelpunkt $\frac{a+b}{2}$
- Bestimme $f(\frac{a+b}{2})$
  - Falls $f(\frac{a+b}{2}) = 0 \Rightarrow$Fertig
  - Falls $f(\frac{a+b}{2}) < 0 \Rightarrow x \in [\frac{a+b}{2}, b]$
  - Falls $f(\frac{a+b}{2}) > 0 \Rightarrow x \in [a, \frac{a+b}{2}]$

Wiederhole diese Schritte immer wieder.



Beispiele

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2 \tag{501}$$

Wegen $f(0) = -2$ und $f(2) = 2 \, : \, \exists x \in [0, 2] : f(x) = 0$
$a = 0$, $b = 2$: $\frac{a+b}{2} = 1$, und $f(1) = -1 < 0$ Damit: $x \in [1, 2]$
$a = 1$, $b = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 1,5$, $f(1,5) > 0$ Damit: $x \in [1; 1,5]$
$a = 1$, $b = 1,5 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 1,25$, $f(1,25) < 0$ Damit: $x \in [1,25; 1,5]$
$a = 1,25$, $b = 1,5 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 1,375$, $f(1,375) < 0$ Damit: $x \in [1,375; 1,5]$

25.5 Zwei Folgerungen

1. Jedes Polynom von ungeradem Grad hat (mindestens) eine Nullstelle in $\mathbb{R}$
2. Fixpunktsatz Ist $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig, so existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$

Beweis

1. für Polynom von ungeradem Grad $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
2. Die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x$ ist stetig, und es gilt:
$$g(a) = f(a) - a \geq 0, \;\; g(b) = f(b) - b \leq 0 \tag{502}$$
Falls $g(a) = 0 \Rightarrow f(a) = a$ Falls $g(b) = 0 \Rightarrow f(b) = b$ Falls $g(a) > 0, g(b) < 0 \underbrace{\Rightarrow}_{Nullstellensatz} \exists x_0 \in [a, b] : \;\; g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$

26 Potenzreihen

Das Konvergenzintervall von Potenzreihen Eine (reelle) Potenzreihe ist eine Reihe von der Form

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x - \underbrace{a}_{\text{Entwicklungspunkt}})^i \quad \text{mit } a, a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{R} \tag{503}$$

Beispiel

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i \to a = 0, a_0 = a_1 = \ldots \begin{cases} \text{für } x = 1 & \sum_{i=0}^{\infty} 1^i \text{ divergiert} \\ \text{für } x = \frac{1}{2} & \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \text{ konvergiert mit Wert } \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{504}$$

Zu jeder Potenzreihe f mit $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$ gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit

- $f(x)$ divergiert
- $f(x)$ konvergiert

Man nennt die Menge $K(f) := \{x \in \mathbb{R} | f(x) \text{ konvergiert } \}$ das *Konvergenzintervall* oder den *Konvergenzkreis* von f. Diese Menge ist ein Intervall mit "Mittelpunkt" a

Das "sieht" man z.B. mit dem Quotientenkriterium.

$$\left| \frac{a_{n+1}(x-a)^{n+1}}{a_n(x-a)^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x-a| \overset{n\to\infty}{\to} q * |x-a| \begin{cases} < 1 & \text{absolute Konvergenz} \\ > 1 & \text{Divergenz} \\ = 1 & \text{keine Aussage möglich} \end{cases} \tag{505}$$

Damit:

$$\text{absolute Konvergenz für} \quad |x-a| < \tfrac{1}{q} \tag{506}$$

$$\text{Divergenz für} \quad |x-a| > \tfrac{1}{q} \tag{507}$$

$$\text{keine Aussage für} \quad |x-a| = \tfrac{1}{q} \tag{508}$$

$$\tag{509}$$

Zu jeder Potenzreihe $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i$ gibt es ein $\mathbb{R} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ mit:

$$f(x) \begin{cases} \text{konvergiert absolut} & \forall x \text{ mit } |x-a| < R \\ \text{divergiert} & \forall x \text{ mit } |x-a| > R \\ \text{keine Aussage} & \forall x \text{ mit } |x-a| = R \end{cases} \tag{510}$$

Man nennt R den *Konvergenzradius* von f

Beachte:

- $R = 0$: Konvergenz nur für $x = a \to K(f) = \{a\}$
- $R = \infty$: Konvergenz für $x \in \mathbb{R} \to K(f) = \mathbb{R}$

Vorsicht: Das Konvergenzintervall $K(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x)\}$ ist nicht unbedingt gleich der Menge $B(f) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-a| < R\}$, es ist offen, ob die Randpunkte $a + R$ und $a - R$ in $K(f)$ liegen.

Beispiele

(1)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!+1}{n!} (x-1)^n \tag{511}$$

$$\left| \frac{a_{n+1} (x-1)^{n+1}}{a_n |x-1|^n} \right| = \left| \frac{2(n+1)!+1}{(n+1)!} \frac{n!}{2n!+1} \right| * |x-1| = \ldots = \left| 1 - \frac{n}{2(n+1)!+n+1} \right| |x-1| \tag{512}$$

$$\to |x-1| \Rightarrow R = 1 \tag{513}$$

Randpunkte

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!+1}{n!} (-1)^n \to \text{ Divergenz nach Nullfolgenkriterium} \tag{514}$$

$$f(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!+1}{n!} \to \text{ Divergenz nach Nullfolgenkriterium} \tag{515}$$

$$\text{Hier gilt: } K(t) =]0, 2[\tag{516}$$

(2)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x-a)^n \tag{517}$$

$$\text{Quotientenkriterium: } \left| \frac{n}{n+1} \right| |x-1| \overset{n\to\infty}{\to} 1 * |x-1| \Rightarrow R = 1 \tag{518}$$

Randpunkte:

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n \quad \text{konvergiert (alterniernde harmonische Reihe)} \tag{519}$$

$$f(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergiert (harmonische Reihe)} \tag{520}$$

$$\text{Hier gilt: } K(f) =]0, 2[\tag{521}$$

(3)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2+1} \tag{522}$$

$$\text{Quotientenkriterium: } \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} |x-3| \overset{n\to\infty}{\to} 1 * |x-3| \Rightarrow R = 1 \tag{523}$$

Randpunkte:

$$f(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \qquad \text{konvergiert (Leibnitz)} \tag{524}$$

$$f(4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \quad \text{konvergente Majorante ist } \sum \tfrac{1}{n^2} \tag{525}$$

$$\text{Hier gilt: } K(f) = [2,4] \tag{526}$$

Für $R =$ Konvergenzradius gibt es die zwei Formeln:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{mit } R = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{527}$$

Beispiel

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \to R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1 \tag{528}$$

$$\text{oder: } R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|1|}} = 1 \tag{529}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \to R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \tag{530}$$

Beachte: Wir setzen voraus, dass $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ mit $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ existiert, SONST $\underbrace{\limsup}_{\text{machen wir nicht}}$

26.1 Potenzreihen definieren stetige Funktionen

Ist R der Konvergenzradius der Potenzreihe f mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, so:

$$f : \begin{cases}]-R+a, a+R[\to \mathbb{R} \\ x \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \end{cases} \quad \text{ist eine stetige Funktion} \tag{531}$$

Und nun die ganze Wahrheit: Viel interessanter:
komplexe Potenzreihen:

$$f \text{ mit } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, a, a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C} \tag{532}$$

Alles gilt genauso für $z \in \mathbb{C}$ (Konvergenzintervall $\to$ Konvergenzkreis)

Beispiele

$$f \text{ mit } f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n : R=\lim\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right| = \lim\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty \tag{533}$$

Damit: $f(z)$ konvergiert $\forall z\in\mathbb{C}\to$ Konvergenzkreis $=\mathbb{C}$

$$f \text{ mit } f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}2^n\,(z-i)^n : R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|2^n|}}=\frac{1}{2} \tag{534}$$

Konvergenzkreis = Kreis um i mit Radius $\frac{1}{2}$

$$f \text{ mit } f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}n^n(z-1)^n \to R=\lim\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}}=\lim\frac{1}{n}=0\to K(f)=\{1\} \tag{535}$$

26.2 Die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp : \begin{cases}\mathbb{C}\to & \mathbb{C}\\ z\to & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\end{cases} \text{ (siehe 1. Beispiel oben)} \tag{536}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}:\exp(x)=e^x \tag{537}$$

die komplexe Expontentialfunktion "setzt die reelle e-Funktion fort" auf $\mathbb{C}$

Man schreibt wieder:

$$\exp(z)=e^z \quad \forall z\in\mathbb{C} \tag{538}$$

Man kann zeigen:

$$e^z * e^w = e^{z+w} \text{ (Binomialformel)} \tag{539}$$

$$e^{\overline{z}}=\overline{e^z} \tag{540}$$

$$|e^z|=e^{Re(z)} \quad \forall z\in\mathbb{C} \tag{541}$$

$$\left|e^{ix}\right|=1 \quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{542}$$

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \quad \forall x\in\mathbb{R} \text{ (Eulersche Formel)} \tag{543}$$

26.3 Eulersche Formel

$$\cos x = Re(e^{ix}),\quad \sin x = Im(e^{ix}) \tag{544}$$

Hiermit gewinnen wir:

Reihendarstellungen für $\sin$ **und** $\cos$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix + \underbrace{\frac{i^2x^2}{2!}}_{-1} + \underbrace{\frac{i^3x^3}{3!}}_{-i} + \underbrace{\frac{i^4x^4}{4!}}_{1} + \underbrace{\frac{i^5x^5}{5!}}_{i} + \frac{i^6x^6}{6!} + \dots \tag{545}$$

$$\to \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}_{\sin x} \tag{546}$$

27 Differentiation

Ableitung Wir betrachten eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und ihren Graphen Graph(f)

Die Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_+h, f(x_0+h))$ hat die Steigung

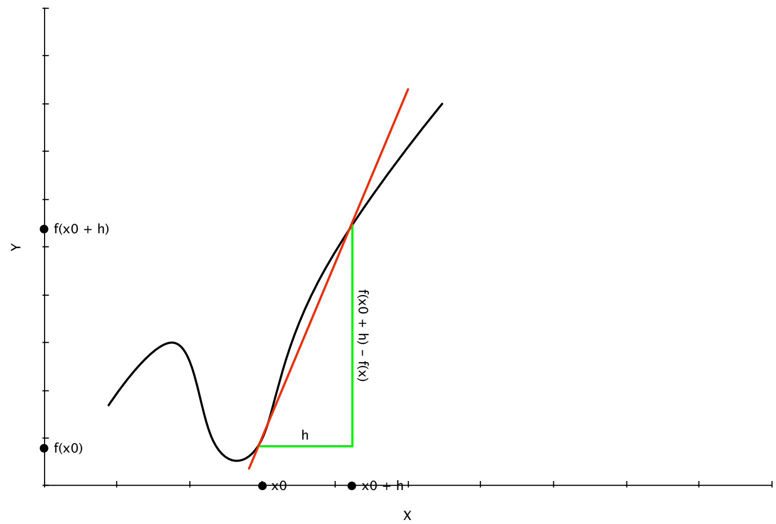


Abbildung 1: Ableitung

$$m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{547}$$

Für $h \to 0$ wird aus der Sekante eine Tangente in $(x_p, f(x_0))$

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in D$ **differenzierbar** (diffbar), wenn

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_=)}{h} =: f'(x_0) = \frac{df}{fx}(x_0) \tag{548}$$

existiert. Mann nennt $f'(x_0)$ die **Ableitung von** f **in** x_0

Man sagt, f ist **auf D diffbar**, wenn f in allen $x_0 \in D$ diffbar ist.

Beispiele:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R} \tag{549}$$

Es gilt für $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a(x_0+h) + b - (ax_0+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h\to 0} a = \mathbf{a} \tag{550}$$

$\Rightarrow$ ist auf $\mathbb{R}(\forall x_0)$ diffbar mit $f'(x_0) = a \forall x_0 \in \mathbb{R}$ **Fall:** $a = 0$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = b \Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \tag{551}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \tag{552}$$

Es gilt für $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x_0 + h = 2x_0 \tag{553}$$

Damit: f ist auf $\mathbb{R}(\forall x_0)$ diffbar mit $f'(x_0) = 2x_0 \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Ist $f : D \to \mathbb{R}$ auf D diffbar, so kann man zu f eine (neue) Funktion erklären:

$$f' : D \to \mathbb{R}, \quad x \to f'(x) \tag{554}$$

die **Ableitungsfunktion von** f

Wie bestimmt man f'? $\to$ **Ableitungsregeln**

Bemerkung:

- Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 diffbar, so ist f in x_0 stetig
- Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in $x : 0$ stetig, so muss f keineswegs in x_0 diffbar sein.

Denn: Zu zeigen:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 : \tag{555}$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \left((x - x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{\underbrace{x - x_0}_{=h}} \right) = \lim_{h \to 0} \left(h \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) = 0 * f'(x_0) = 0 \tag{556}$$

$$| \, | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to |x| \tag{557}$$

ist in 0 stetig:

$$\lim_{x \to 0} |x| = |0| \tag{558}$$

Aber:

$$\forall NF(x_n) \text{ mit } x_n > 0 : \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{x_n} = 1 \tag{559}$$

$$\forall NF(x_n) \text{ mit } x_n < 0 : \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{x_n} = -1 \tag{560}$$

$$\tag{561}$$

$\Rightarrow |.|$ ist in 0 nicht **diffbar**

27.1 Tangentengleichung

Die Gleichung der Tangente an dem Graphen von $f : D \to \mathbb{R}$, f diffbar in x_0, an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ lautet:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{562}$$

Denn:

$$y = b + mx \text{ und } m = f'(x_0) \text{ , mit } x = x_0 : (x_0, f(x_0)) \text{ liegt auf der Geraden} \tag{563}$$

Die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{564}$$

ist eine lineare Funktion (d.h. eine Polynomfunktion vom Grad 1), die in der "Nähe von x_0" "gut" mit f übereinstimmt $\to$ **lineare Approximation**.

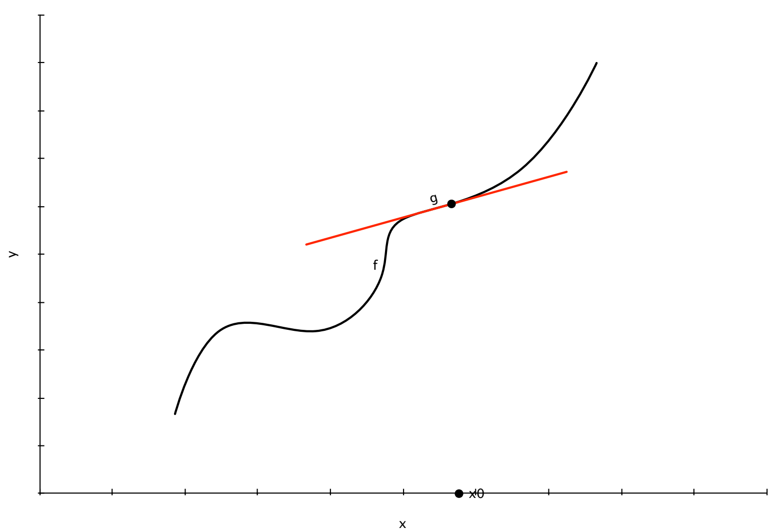


Abbildung 2: lineare Approximation

27.2 Ableitungsregeln

- f, g in x_0 diffbar $\Rightarrow \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$
- f, g in x_0 diffbar $\Rightarrow (f * g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ **(Produktregel)**
- f, g in x_0 diffbar $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ **(Quotientenregel)**
- f in $g(x_0)$ diffbar, g in x_0 diffbar $\Rightarrow (f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$ **(Kettenregel)**
- f umkehrbar und diffbar in $x_0 = f^{-1}(y)$ und $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow (f^{-1})(y) = \frac{1}{f'\left(\underbrace{f^{-1}(y)}_{x_0}\right)}$
- $f : D \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R, so:

$$f :]\underbrace{-R + a, a + R}_{\subseteq D}[\to \mathbb{R} \text{ diffbar mit } f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1} \tag{565}$$

diese (neue) Potenzreihe hat wieder den Konvergenzradius R

Beispiele.

$$(e^x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \tag{566}$$

$$(\sin x)' = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \cos x \tag{567}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{568}$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \begin{cases} 1 + \tan^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases} \tag{569}$$

$$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \tag{570}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{571}$$

$$\exp'(\ln x) * \ln'(x) = (\exp(\ln(x)))' = (x)' = 1 \Rightarrow \ln' x = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} \tag{572}$$

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \tag{573}$$

$$\tan'(\arctan x) \arctan' x = (\tan(\arctan x))' = (x)' = 1 \tag{574}$$

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2} \tag{575}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{576}$$

$$\arctan' x = \frac{-1}{1+x^2} \tag{577}$$

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{578}$$

$$(x^r)' = r * x^{r-1} \forall r \in \mathbb{Q} \quad ((\sqrt{x})' = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2\sqrt{x}}, \left(\tfrac{1}{x^2}\right)' = \tfrac{-2}{x^3}) \tag{579}$$

$$f(x) = \left(x^3+1\right)^7 \Rightarrow 7\left(x^3+1\right)^6 3x^2 \tag{580}$$

$$f(x) = \arctan(\cos ax) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{1+(\cos ax)^2} * (-\sin ax)a = \frac{a \sin ax}{1+\cos^2 ax} \tag{581}$$

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x^x} = e^{x \ln x} \Rightarrow f'(x) = e^{x \ln x}(1 \ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1) \tag{582}$$

27.3 n-mal stetige Diffbarkeit

Eine auf D diffbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig diffbar** , falls $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Ist f' sogar diffbar auf D (d.h. $\exists (f')' =: f''$ - die **zweite Ableitung**) mit stetigem f'', so nennt man f zweimal stetig diffbar.

$$f^{(n)} \text{ (n-te Ableitung)} \tag{583}$$

n-mal **stetig diffbar** $\ldots n = \infty$: unendlich oft diffbar.

Mit $C^n(D)$ bezeichnet man die Menge der n-mal stetig diffbaren Funktionen auf $D, n \in \mathbb{N}_0 \sup \{\infty\}$

$$C^n(D) = \{f : D \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ n-mal stetig diffbar auf } D\} \tag{584}$$

Es gilt:

- $\exp, \ldots$ Polynome, Potenzreihen, sin, cos, $\ldots \in C^\infty(\mathbb{R})$
- $C^n(D) = \mathbb{R}$ ist Untervektorraum

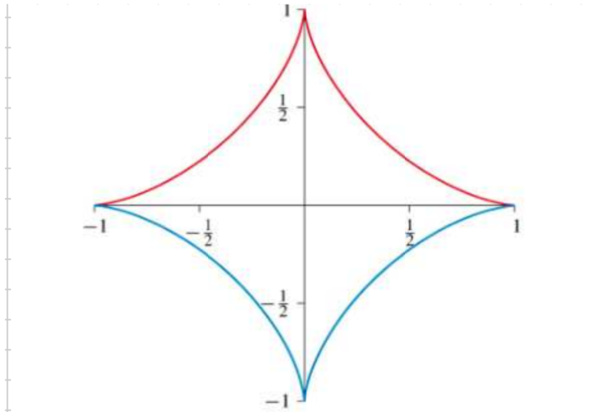


Abbildung 10.14 Die Astroide aus dem Beispiel auf Seite 296. Die Teilstücke lassen sich als Graphen auffassen, aber offensichtlich besitzt die entsprechende Funktion in den Eckpunkten keine Ableitung.

Abbildung 3: Implizites Differenzieren

27.4 Implizites Differenzieren

Beispiel

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \tag{585}$$

Beidseits Ableiten:

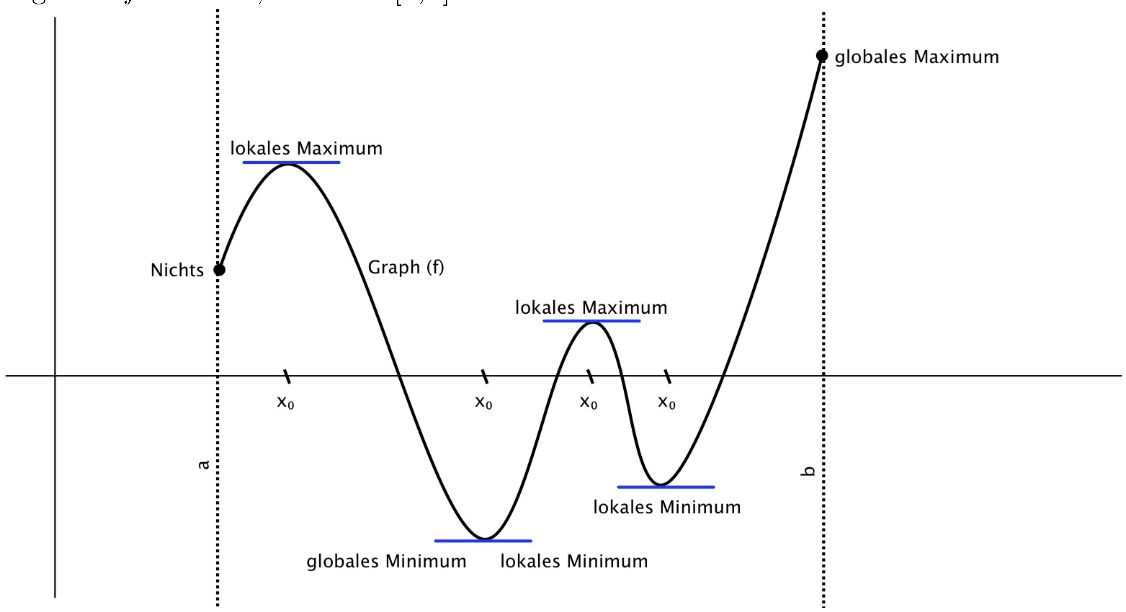
$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}} * y' = 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{y} = \dots y = -\frac{\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x}} \tag{586}$$

28 Anwendung der Differentialrechnung: Extremwertbestimmung

Zentrale Begriffe: Lokale und globale Extrema, Satz von Rolle, Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Kriterium für Monotonie, Extremwertkriterien

28.1 Lokale und globale Extrema

Gegeben: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, hier $\mathbb{D} = [a, b]$



Man nimmt ein $x_0 \in \mathbb{D}$

- Stelle eines globalen Maximums, falls $f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{D}$.
- Stelle eines globalen Minimums, falls $f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{D}$
- Stelle eines lokalen Maximums, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, mit $f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$
- Stelle eines lokalen Minimums, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, mit $f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

Ist $x_0 \in \mathbb{D}$ Stelle eines

- globalen Maximums, so nennt man $f(x_0)$ das globale Maximum
- globalen Minimums, so nennt man $f(x_0)$ das globale Minimum
- lokalen Maximums, so nennt man $f(x_0)$ ein lokales Maximum
- lokalen Minimums, so nennt man $f(x_0)$ ein lokales Minimum

Maxima und Minima fasst man unter dem Begriff Extrema zusammen.

Untersteide genau: Extrema-Stelle $x_0 \leftrightarrow$ Extrema-Wert $f(x_0)$

Beispiele:

- $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = 2$
  Jedes $x \in]-2, 2[$ ist Stelle eines gl.Max./gl.Min./lok.Max/lok.Min. mit dem jeweiligen Wert 2.

- $f : [0, 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$
  gl.Min.=0 in $x_0 = 0$, gl.Max.=9 in $x_0 = 3$, lok.Min.=4 in $x_0 = 2$, lok.Max.=5 in $x_0 = 3$

Wie bestimmt man die Extrama einer Funktion? Vorab drei Sätze:

Es gilt: Gegeben ist eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die auf (a, b) differenzierbar ist.

(a) Ist $x_0 \in (a, b)$ Stelle eines lokalen Extremums, so gilt $f'(x_0) = 0$

(b) (Satz von Rolle) Ist $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$

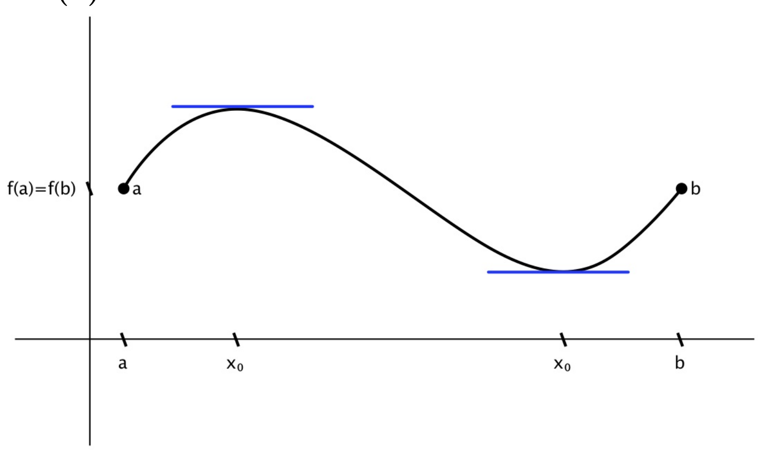
(c) (Mittelwertsatz) Es gibt mindestens ein $x_0(a, b)$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(d) $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$, so gilt: $\exists c \in \mathbb{R} : f(x) = (\forall x \in [a, b])$

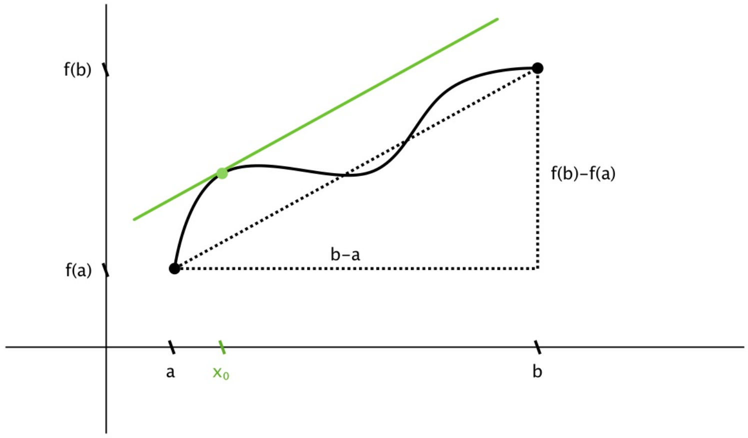
Zu (a): Diese Aussage liefert alle Kandidaten für die Stellen lokaler Extrema. Die Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$ heißen stationäre oder kritische Stellen.

Gilt $f'(x_0) = 0$, so kann in x_0 ein lokales Extremum sein, das muss es aber nicht, z.B. hat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$ kein lokales Extremum, obwohl $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2$ in $x_0 = 0$ eine Nullstelle hat.

Zu (b): Bild:



Zu (c): Bild:



Auf die einfachen Begründungen dieser Sätze verzichten wir.

28.2 Monotonie

Wiederholung

- $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend, falls gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt streng monoton wachsend, falls gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt monoton fallend, falls gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt streng monoton fallend, falls gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

28.2.1 Kriterium für Monotonie

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar, so ist:

- f monoton wachsend genau dann, wenn $f'(x) \geq 0 \; \forall x \in (a, b)$
- f monoton fallend genau dann, wenn $f'(x) \leq 0 \; \forall x \in (a, b)$
- f streng monoton wachsend genau dann, wenn $f'(x) > 0 \; \forall x \in (a, b)$
- f streng monoton fallend genau dann, wenn $f'(x) < 0 \; \forall x \in (a, b)$

Die Umkehrung der letzten beiden gilt nicht:

- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend,
  aber $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$ ist erfüllt $f'(0) = 0 \not> 0$
- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3$ ist streng monoton fallend,
  aber $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = -3x^2$ ist erfüllt $f'(0) = 0 \not< 0$

28.3 Extremwertkriterien

28.3.1 1. Extremwert-Kriterium

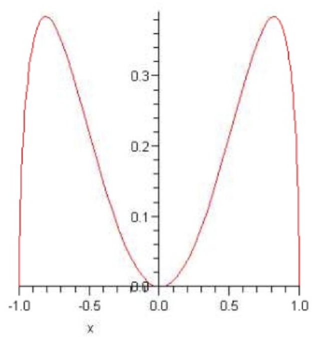
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar, so gilt :

- Ein Stationärer Punkt x_0 (d.h. $f'(x_0) = 0$) ist Stelle eines lokalen Minimums, falls: $\exists \epsilon > 0$ mit $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0 + \epsilon)$.
- Ein Stationärer Punkt x_0 (d.h. $f'(x_0) = 0$) ist Stelle eines lokalen Maximums, falls: $\exists \epsilon > 0$ mit $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ und $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0 + \epsilon)$.

Man spricht von einem Vorzeichenwechsel von f'.
Findet in x_0 kein Vorzeichenwechsel statt, so ist x_0 nicht Stelle eines lokalen Extremas.

Bemerkung: Ist f in x_0 nicht differenzierbar, und findet in x_0 ein Vorzeichenwechsel von f' statt, so liegt in x_0 dennoch ein lokales Extremum vor.
z.B.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ hat in $x_0 = 0$ ein lokales Minimum.

Beispiel: $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$



f ist stetig auf $(-1,1)$ und differenzierbar auf (-1,1) mit der Ableitung

$$f'(x) = 2x\sqrt{1-x^2} + x^2 \frac{1}{2}\frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x(1-x^2) - x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-3x^3+2x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{587}$$

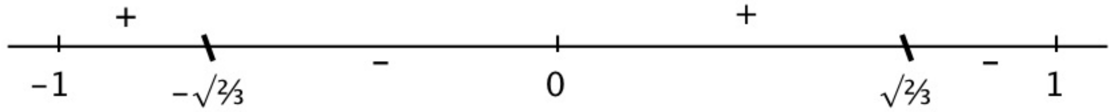
Damit:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-3x^3+2)x = 0 \Leftrightarrow x(2-3x^2) = 0 \tag{588}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = \sqrt{\frac{2}{3}} \vee x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \tag{589}$$

Damit haben wir drei stationäre Punkte: $x_1 = 0, x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}, x_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ Betrachte nun das Vorzeichen von:

$$f'(x) = \frac{-3\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) x \left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{590}$$



Damit:

Lokales Maximum in $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ mit Wert $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Lokales Minimum in $x_2 = 0$ mit Wert 0

Lokales Maximun in $x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ mit Wert $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Zur Ermittlung der globalen Extrema bestimmen wir die Werte an den Rändern:

$$f(-1) = 0\,,\ f(1) = 0 \tag{591}$$

Damit

Globales Maximum in $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ mit Wert $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Globales Minimum in $\pm 1, 0$ mit Wert 0

28.3.2 2. Extremwert-Kriterium

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) zweimal stetig differenzierbar, so gilt für einen stationären Punkt $x_0 \in (a, b)$:

- Falls $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 =$ Stelle eines lokalen Maximums
- Falls $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 =$ Stelle eines lokalen Minimums
- Falls $f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich

Beachte:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ hat in dem statischen Punkt $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, <u>aber</u> $f''(0) = 0$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^4$ hat in dem statischen Punkt $x_0 = 0$ ein lokales Maximum, <u>aber</u> $f''(0) = 0$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ hat in dem statischen Punkt $x_0 = 0$ ein lokales Maximum und Minimum, <u>aber</u> $f''(0) = 0$

Das heißt:

$$f'(x_0) = 0 \vee f''(x_0) = 0 \Rightarrow \text{ Alles ist möglich} \tag{592}$$

Beispiel: Bei der Betrachtung der Energie relativistischer Teilchen stößt man auf die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{sin^2 x}{(1 - a\,cos\,x)^5} \text{ mit } a \in (0,1) \tag{593}$$

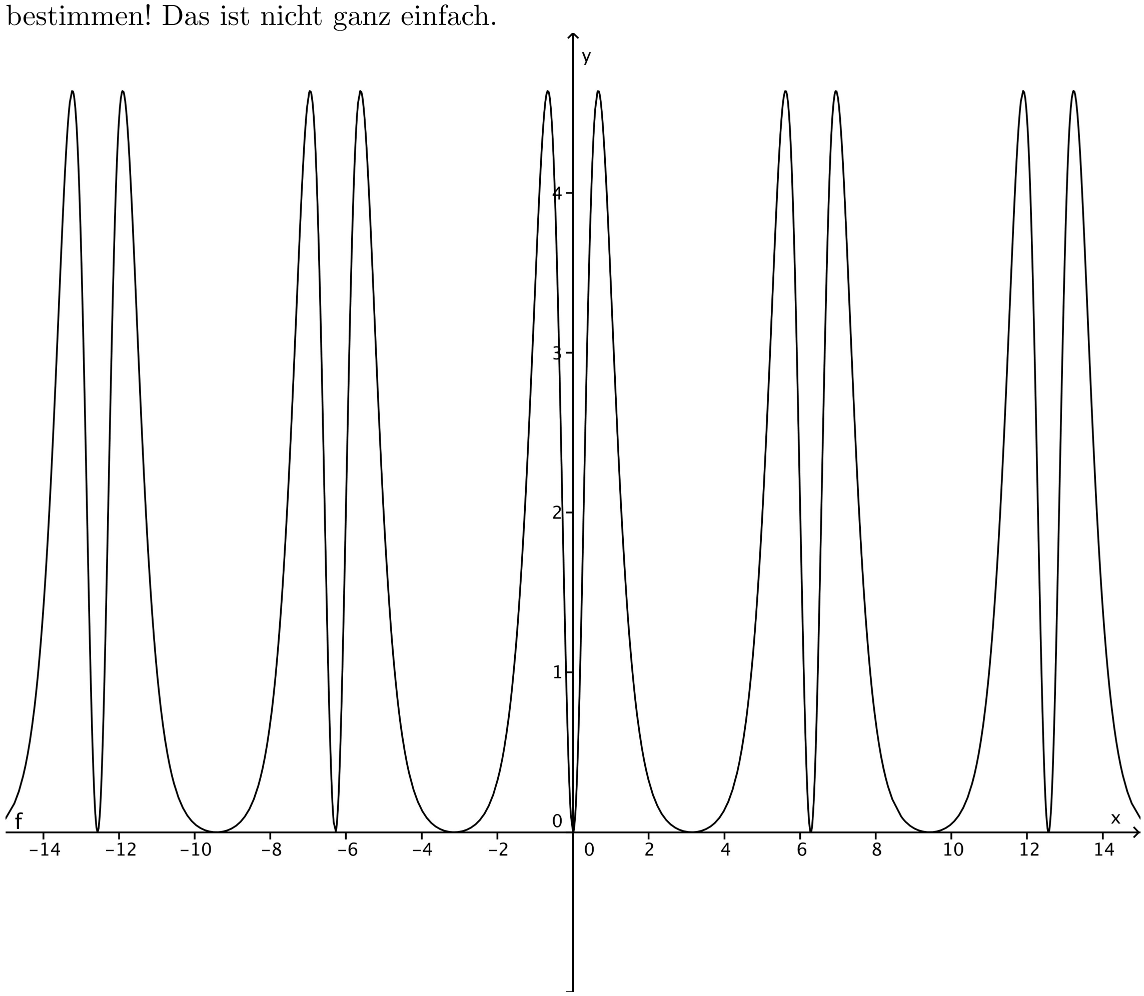
Wir zeigen: f hat in $x_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ lokale Minima:

$$f'(x) = \frac{2\,sin\,x\,cos\,x(1-a\,cos\,x) - 5a\,sin^3\,x}{(1-a\,cos\,x)^6} \tag{594}$$

$$f''(x) = \frac{cos\,x(2\,cos\,x + 3a\,cos^2\,x - 5a) + sin\,x(-2\,sin\,x - 6a\,sin\,x\,cos\,x)}{(1-a\,cos\,x)^6} - \frac{6a\,sin^2\,x(2\,cos\,x + 3a\,cos^2\,x - 5a)}{(1-a\,cos\,x)^7} \tag{595}$$

Wegen $f'(n\pi) = 0$ sind $x_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, stationäre Stellen.

Wegen $f''(n\pi) = \frac{(-1)^n(2(-1)^4 + 3a - 5a}{\underbrace{(1-a(-1)^n)^6}_{=b>0}} = \frac{2-2a(-1)^4}{b} > 0$, $a \in (0,1)$ liegen in $x_n = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, lokale Minima vor. Unten ist der Graph von f abgebildet. Zwischen zwei lokalen Minima liegt ein lokales Maximum vor. Es gibt also weitere statische Punkte (unendlich viele sogar): Versuchen sie diese zu bestimmen! Das ist nicht ganz einfach.



29 Weitere Anwendungen der Differentialrechnung 2

Zentrale Begriffe: Konvexe-, Konkave Funktionen, Regel von L'Hospital, das Newton-Verfahren, Fixpunktiteration

29.1 Konvexitaet

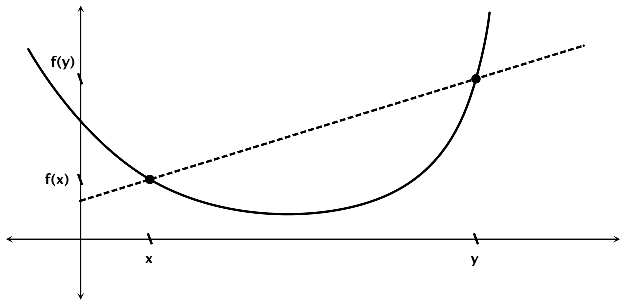


Abbildung 4: Geradengleichung der Sekante

Die Geradengleichung der Sekante:

$$g(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(z - x) + f(x) \tag{596}$$

Die Punkte im Intervall $[x, y]$ sind gegeben durch

$$z = x + t(y - x), \quad t \in [0, 1] \tag{597}$$

$$\to g(z(t)) = (f(y) - f(x))\, t + f(x) = (1 - t)\, f(x) + tf(y) \tag{598}$$

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt: $(t \in [0, 1])$

- konvex auf $[a, b]$, falls $f(x + t(y - x)) = f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)\, f(x) + f(y)$
- strikt konvex auf $[a, b]$, falls $f(x + t(y - x)) = f((1 - t)x + ty) < (1 - t)\, f(x) + f(y)$
- konkav auf $[a, b]$, falls $f(x + t(y - x)) = f((1 - t)x + ty) \geq (1 - t)\, f(x) + f(y)$
- strikt konkav auf $[a, b]$, falls $f(x + t(y - x)) = f((1 - t)x + ty) > (1 - t)\, f(x) + f(y)$

Konvex bedeutet: "Der Graph von f liegt unterhalb der Sekante"

Beispiele

Kriterium für konvexitaet: Gegeben $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f$ zweimal stetig diffbar.

- f ist genau dann konvex auf $[a, b]$, fall $f''(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$
- f ist genau dann konkav auf $[a, b]$, fall $f''(x) \leq 0 \forall x \in [a, b]$
- f ist streng konvex auf $[a, b]$, falls $f''(x) > 0 \forall x \in [a, b]$
- f ist streng konkav auf $[a, b]$, fall $f''(x) < 0 \forall x \in [a, b]$

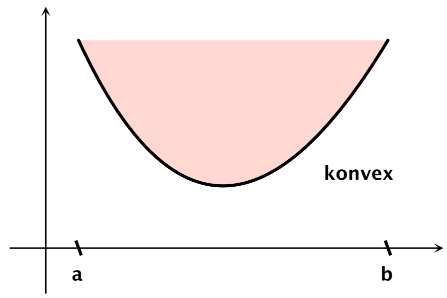


Abbildung 5: Konvex

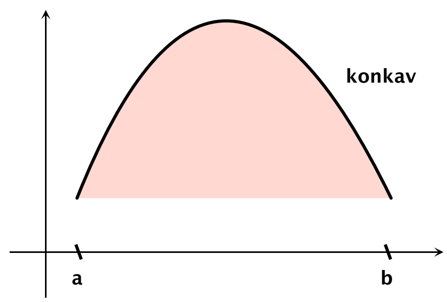


Abbildung 6: Konkav

29.2 Regel von L'Hospital

Zur Berechnung von Grenzwerten

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ diffbare Funktion, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ mit

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0 \text{ oder } \lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = \infty \tag{599}$$

Falls

$$\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ , so gilt } \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{600}$$

Beispiele

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 0 \tag{601}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \tag{602}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \tag{603}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} = 0 \tag{604}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{x} = \infty \tag{605}$$

L'Hospital ist nicht immer anwendbar!

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x + 2x + \cos x - \cos x}{\cos x + 2x} = 1 + \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + 2x} = 0 \tag{606}$$

29.3 Das Newton-Verfahren

$\rightarrow$ Zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen, d.h.

$$\text{Löse } f(x) = 0 \tag{607}$$

Gegeben:

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ diffbar} \tag{608}$$

Gesucht:

$$\hat{x} \in [a, b] \text{ mit } f(\hat{x}) = 0 \tag{609}$$

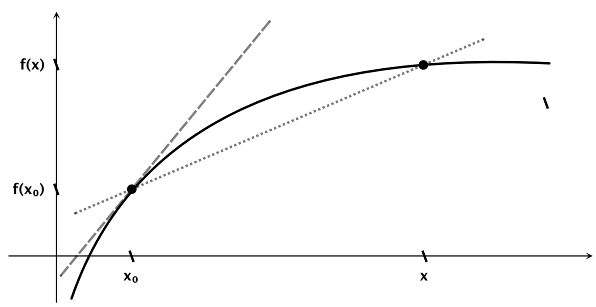


Abbildung 7: Newton-Verfahren

Tangente an $(x, f(x))$:

$$y = f(x_0) + f'(x)\,(x - x_0) = 0 \tag{610}$$

$$\rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, x_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \ldots \tag{611}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ mit Startwert } x_0 \tag{612}$$

Aber:
Falls f stetig diffbar ist, falls $f'(x_i) \in 0 \forall i$, falls (x_n) konvergiert gegen ein $\hat{x}$, dann: $f(\hat{x}) = 0$

Das ist etwa dann erfüllt, wenn $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal diffbare konvexe Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ ist. Man findet dann $\hat{x}$ wie folgt:

- Wähle Startwert $x_0 \in [a, b]$
- Berechne $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \ldots \hat{x}$

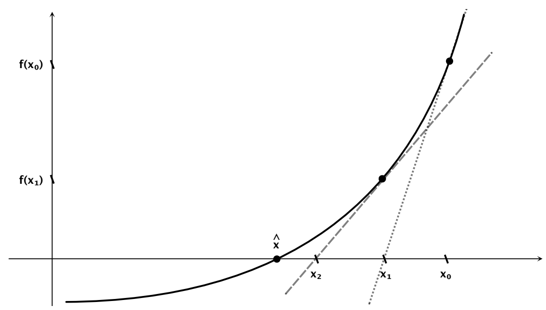


Abbildung 8:

Beispiel:

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, f(x) = x^k - a \quad a \in \mathbb{R}_{>0}, k \in \mathbb{N}_{\geq 2} \tag{613}$$

Startwert $x_0 = 1$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{k x_n^{k-1}} = \frac{1}{k}\left(k x_n - x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) = \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) \tag{614}$$

Vergleiche Babylonisches Wurzelziehen:

$$k = 2 : x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \tag{615}$$

In den günstigen Fällen: *Quadratische Konvergenz*:
Bei jeder Iteration verdoppelt sich die Anzahl der korrekten Nachkommastellen.

Fehlernäherung:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq |\hat{x} - x_n| \leq c\,|x_n - x_{n-1}|^2, \quad c > 0 \tag{616}$$

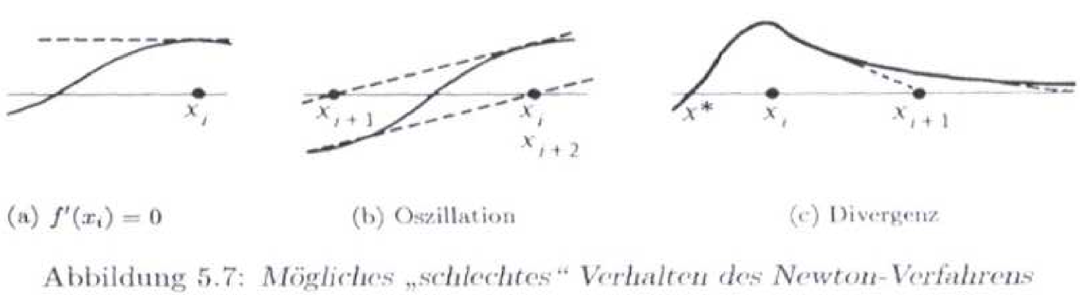


Abbildung 9: Scheitern des Newton-Verfahrens

Beispiel:

$$k = 2, a = 3x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 1,75, x_3 = 1,7321, x_n = 1,7320508 \tag{617}$$

29.4 Fixpunktiteration

Näherungsweise Bestimmung von Fixpunkten: $f(\hat{x}) = \hat{x}$ mit diffbarem f:
Falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, falls $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) \ldots \in [a,b]$
falls $x_n \to \hat{x} \in [a,b]$, so:

$$\hat{x} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = f(\hat{x}) \tag{618}$$

Das ist zum Beispiel dann erfüllt, wenn:

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ ist diffbar} \tag{619}$$

$$f([a,b]) \subseteq [a,b] \tag{620}$$

$$\left|f'x)\right| \leq q < 1 \forall x \in [a,b] \tag{621}$$

$$\Rightarrow x_0 \in [a,b] \to x_{n+1} = f(x_n) \text{ konvergiert gegen Fixpunkt } \hat{x} \text{ von } f \tag{622}$$

Fehlerabschätzung

$$|\hat{x} - x_n| \leq \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n+1}| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| \tag{623}$$

Beispiel: Planksches Strahlungsfunktion:

$$F : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{x^5}(e^{\frac{1}{x}-1}) \tag{624}$$

$$\to F'(x) = 0 \tag{625}$$
$$5x(e^{\frac{1}{x}-1}) - e \tag{626}$$

Leider fehlt das letzte Beispiel.

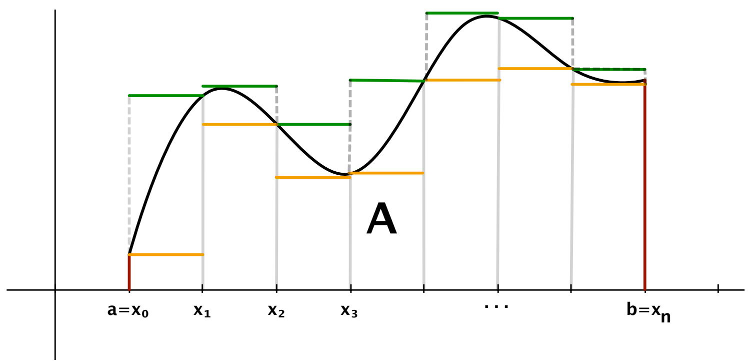
30 Das Integral

Zentrale Begriffe: Das Riemann-Integral, Obersumme, Untersumme, Mittelwertsatz der Integralrechnung

30.1 Das (bestimmte) Riemann-Integral

Wir betrachten den Graph einer Funktion:

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}_{(>0)} \tag{627}$$



Gesucht: Flächeninhalt A

Methode: Approximiere A durch immer "feinere" Rechtecke.

1. Zerlege $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b \to$ Zerlegung Z
2. Bestimme für jedes Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, \ldots, n$:

$$M_i = sup\ \{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} \text{ und } m_i = inf\ \{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} \tag{628}$$

   Das liefert zwei Treppenfunktionen:

$$\Phi : \begin{cases} [a, b] \to \mathbb{R} \\ x \to m_i, \text{ falls } x \in (x_{i-1}, x_i) \end{cases} \quad \text{und } \varphi : \begin{cases} [a, b] \to \mathbb{R} \\ x \to M_i, \text{ falls } x \in (x_{i-1}, x_i) \end{cases} \tag{629}$$

   Es gilt: $\forall x \in [a, b] : \ \varphi(x) \leq f(x) \leq \Phi(x)$

3. Berechne
   - die <u>Obersumme</u> $O_z(f) := \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$
   - die <u>Untersumme</u> $U_z(f) := \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$

   Es gilt:

$$U_z(f) \leq O_z(f) \tag{630}$$

4. Setze

$$U(f) = \sup\{U_z(f) \,|\, Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} \tag{631}$$
$$O(f) = \inf\{O_z(f) \,|\, Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} \tag{632}$$

5. Man nennt eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (Riemann-)Integralfunktion, falls $U(f) = O(f)$.
   Die Zahl $U(f) = O(f) \in \mathbb{R}$ nennt man das *bestimmte (Riemann-)Integral*, man schreibt:

$$U(f) = O(f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{633}$$

Beispiele:

- Jede konstante Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ ist integrierbar mit bestimmten Integral

$$\int\limits_a^b c\,dx = c(b-a) \tag{634}$$

- Jede Treppenfunktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar
- Die Funktion

$$f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{R} \end{cases} \end{cases} \tag{635}$$

  Ist *nicht* integrierbar: Für jede Zerlegung Z gilt: $[x_{i-1}, x_i]$ enthält Punkte aus $\mathbb{Q}$ und aus $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Damit gilt:

$$m_i = \inf\{f(x) \,|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0 \text{ und } M_i = \sup\{f(x) \,|\, x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0 \tag{636}$$

  Es folgt $U_z(f) = 0$ und $O_z(f) = 1$ und damit $U(f) = 0$ und $O(f) = 1$

Problem: Wir brauchen eine Methode, $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ zu ermitteln $\Rightarrow$ *das unbestimmte Integral.*

30.2 Wichtige Eigenschaften und Aussagen zum bestimmten Integral

Für Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

1. Ist f stetig, so ist f integrierbar
2. Ist f monoton, so ist f integrierbar
3. Ist f integrierbar, so auch
   - ihr *Positivteil* $f^+ : [a,b] \to \mathbb{R}, f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$

- ihr *Negativteil* $f^- : [a,b] \to \mathbb{R}, f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$
- ihr *Betrag* $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}, |f|(x) = |f(x)|$

4. Ist f integrierbar, so gilt

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\;dx \tag{637}$$

5. Sind f und g integrierbar, so auch $f+g$, es gilt

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx \tag{638}$$

6. Ist f integrierbar, so auch λf für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$, und es gilt

$$\int\limits_a^b (\lambda \cdot f(x))\,dx = \lambda \cdot \int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{639}$$

7. Sind f und g integrierbar, und gilt $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, so gilt

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx \tag{640}$$

8. Ist f integrierbar, so setzt man

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx := -\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{641}$$

9. Ist f integrierbar, so gilt für jedes $c \in \mathbb{R}$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx \tag{642}$$

10. Ist f integrierbar, so gilt

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{643}$$

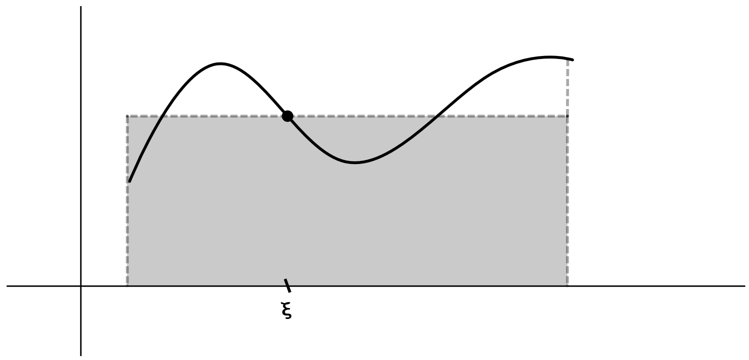
11. Ist f integrierbar, so gilt für $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f\tilde{(x)} = \begin{cases} f(x), x \neq x_0 \\ \omega, x = x_0 \end{cases}$,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b \tilde{f}(x)\,dx \tag{644}$$

30.3 Der Mittelwertsatz der Differentialrechung

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann $\exists\, \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \tag{645}$$



30.4 Das unbestimmte Integral

Gegeben: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.
Eine differenzierbare Funktion

$$F : [a,b] \to \mathbb{R} \tag{646}$$

heißt *Stammfunktion* zu f, falls:

$$F' = f, \text{ d.h. } \forall x \in [a,b] : F'(x) = f(x) \tag{647}$$

Beachte:

- Ist F eine Stammfunktion zu $f \Rightarrow\ \forall\, x + \mathbb{R} : \underbrace{F}_{[a,b]\to\mathbb{R},(F+c)(x)=F(x)+c} +c$ ist Stammfunktion zu f
- Sind F, G Stammfunktionen zu f so:

$$(F-G)' = F'-G' = f-f = 0,\ \text{d.h. } (F-G)'(x) = 0 \forall\, x \in (a,b) \Rightarrow F-G \underbrace{=}_{\text{MWS d. Diff}} C \Rightarrow G = F+c', c' \in \mathbb{R} \tag{648}$$

$\Rightarrow$Ist F eine Stammfunktion zu $f \Rightarrow \{F + c | c \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge der Stammfunktionen zu f.

30.5 Der Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

- Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist

$$F : [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(x)\,dx \tag{649}$$

eine Stammfunktion zu f.

- Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu f, so:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{650}$$

30.6 Begründung des HDI

Anm. d. Red. Die Begründung des HDI war nicht Stoff der Vorlesung.

Denn: Beachte für $x, x_0 \in [a,b]$:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left[\int\limits_a^x f(x)\,dx - \int\limits_a^{x_0} f(x)\,dx\right] \tag{651}$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\int\limits_{x_0}^x f(x)\,dx \underbrace{=}_{MWS} f(\xi) \text{ mit } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_0. \tag{652}$$

Da f stetig:

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim\limits_{\xi \to x_0} f(\xi) & = & f(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} & = & F'(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0)\,\forall x_0 \in [a,b] \tag{653}$$

Ist F eine Stammfunktion zu f, so gilt

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx + c \text{ mit } c \in \mathbb{R} \tag{654}$$

Daraus folgt:

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx - \int\limits_a^a f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{655}$$

30.7 Berechnen von Stammfunktionen

Also geht man zur Berechnung von $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ wie folgt vor:

- Berechne Stammfunktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ zu f
- Berechne $F(b) - F(a)$

Beispiel:

$$\int_1^3 2x\,dx = ? \tag{656}$$

- $F : [1,3] \to \mathbb{R}, F(x) = x^2$ ist Stammfunktion zu $f : [1,3] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$
- $\int_1^3 2x\,dx = F(3) - F(1) = 9 - 1 = 8$

Die Menge aller Stammfunktionen zu einer Funktion f nennt man das unbestimmte Integral zu f:

$$\int f(x)\,dx = \{F + c \,|\, c \in \mathbb{R}\} \tag{657}$$

Beispiel:

$$\int 2x\,dx = \left\{x^2 + c \,|\, c \in \mathbb{R}\right\} \tag{658}$$

Schlampige Schreibweise:

$$\int f(x)\,dx = F + c \tag{659}$$

Beispiel:

$$\int 2x\,dx = x^2 + c \tag{660}$$

Noch Schlampiger:

$$\int f(x)\,dx = F \tag{661}$$

Beispiel:

$$\int 2x\,dx = x^2 \tag{662}$$

31 Integrationstechniken

Zentrale Begriffe: Linearität des Integrals, partielle Integration, Substitution, logarithmische Integration, Integration rationaler Funktionen

Methoden:

- Langes und scharfes Hingucken und Probieren
- Partielles Integrieren
- Substitution
- logarithmische Integration
- Integration rationaler Funktionen
- "Rationale Funktionen" in sin und cos
- MAPLE
- Numerische Integration

Maple

$$int(x^2, x) \tag{663}$$
$$x^2 \text{ integriert nach } x \tag{664}$$

Beachte: Das Integral einer elementaren Funktion kann nicht mehr elementar sein:

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx =? \quad \int e^{-x^2}\, dx =? \tag{665}$$

Wir wissen :

f	x^n	cos	sin	exp	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{cos^2 x}$	$\frac{1}{sin^2 x}$	0	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{1+x^2}$
F	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	sin	$-cos$	exp	$ln\,\lvert x\rvert$	$tan\,x$	$-\cot\,x$	c	$ln\,\lvert f(x)\rvert$	$\arctan x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$arccot x$

$\Rightarrow$dann:

$$(ln\, f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ für } f(x) > 0 \tag{666}$$
$$(ln\,(-f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ für } f(x) < 0 \tag{667}$$

31.1 Linearität des Integrals

Wegen

$$\int \lambda f(x) + \mu g(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx + \mu \int g(x)\, dx, \quad (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g \text{ integrierbar}) \tag{668}$$

, also der "Linearität des Integrals" muss man also "nur" "normierte" Summanden integrieren können.

31.2 Partielle Integration

Die Produktregel zum Differenzieren:

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{669}$$

Integration beidseits liefert die Rebel zu partiellen Integration:

$$\int uv' = uv - \int u'v \tag{670}$$

Beispiele:

- $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{cos\,x}_{v'}\,dx = \begin{vmatrix} u = x & , & u' = 1 \\ v' = cos\,x & , & v = \sin\,x \end{vmatrix} = x\,\sin\,x - \int\ \sin\,x\,dx = x\,\sin\,x + cos\,x$

- $\int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{ln\,x}_{u}\,dx = \begin{vmatrix} u = ln\,x & , & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & ; & v = x \end{vmatrix} x\,ln\,x - \int \frac{1}{x}x\,dx = x(ln\,x - 1)$

- $\int \frac{ln\,x^2}{x^2}dx = \int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{v'}\underbrace{ln(x^2)}_{u}\,dx = \begin{vmatrix} u = ln\,x^2 & , & u' = \frac{2}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} & , & v = -\frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{-ln\,x^2}{x} + \int \frac{2}{x^2}dx = -\frac{1}{x}(ln\,x^2 + 2)$

- $\int \underbrace{e^x}_{v'}\underbrace{\sin\,x}_{u} = \begin{vmatrix} u = \sin\,x & , & u' = \cos\,x \\ v' = e^x & , & v = e^x \end{vmatrix} = e^x\sin\,x - \int e^x cos\,x\,dx = \begin{vmatrix} u = \cos\,x & , & u' = -\sin\,x \\ v' = e^x & , & v = e^x \end{vmatrix} =$
  $= e^x\sin\,x - [e^x cos\,x + \int e^x\sin\,x\,dx] = e^x(\sin\,x - cos\,x) - \int e^x\ \sin\,x\,dx$
  $\Rightarrow \int e^x\sin\,x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin\,x - cos\,x)$

31.3 Substitution

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{dt} = \int f(t)\,dt \tag{671}$$

Denn: $t = g(x) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = g'(x) \Rightarrow dt = g'(x)\,dx$

Beispiele:

- $\int cos(\underbrace{e^x}_{t})\,\underbrace{e^x\,dx}_{dt} = \begin{vmatrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{vmatrix} = \int cos\,t\,dt = -\sin\,t = -\sin\,e^x$

- $\int tan\,x\,dx = -\int \frac{1}{cos\,x}\cdot(-\sin\,x)\,dx = \begin{vmatrix} t = cos\,x \\ dt = -\sin\,x\,dx \end{vmatrix} = -\int \frac{1}{t}\,dt = -ln\,|t| = -ln\,|\cos\,x|$

- $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \begin{vmatrix} t = 1 + e^x \\ dt = e^x dx \end{vmatrix} = \int \frac{1}{t^2}dt = \frac{-1}{t} = \frac{-1}{1+e^x} = -\ln|\cos x|$

- $\int \frac{x}{sin^2\,x}\,dx = \begin{vmatrix} u = x & , & u' = 1 \\ v' = \frac{1}{sin^2\,x} & , & v = \frac{-cos\,x}{\sin\,x} \end{vmatrix} = -x\,\frac{\cos\,x}{\sin\,x} + \int \frac{\cos\,x}{\sin\,x}\,dx = \begin{vmatrix} t = \sin\,x \\ dt = \cos\,x\,dx \end{vmatrix} =$
  $= -x\,cot\,x + \int \frac{1}{t}dt = -x\ \cot\,x + \ln|\sin\,x|$

31.3.1 Sonderfall: "logarithmische Integration"

$$\int \frac{1}{g(x)} g'(x)\, dx = \int \frac{1}{t} dt = ln|t| = ln|g(x)|,\ f : t \to \frac{1}{t} \tag{672}$$

Beispiele:

- $\int \frac{3x}{x^2+1}\, dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^+1}\, dx = \frac{3}{2} \ln{(x^2+1)}$
- $\int \frac{\cos\, x}{1+\sin\, x}\, dx = \ln|1+\sin\, x|$
- $\int \frac{x+2}{x^2+4x+9}\, dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+4x+9|$

31.3.2 Die Substitution kann man auch "umkehren"

- $\int \frac{1}{e^x+1} dx = \begin{vmatrix} x = \ln\, t \\ dx = \frac{1}{t} dt \end{vmatrix} = \int \frac{1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} = \ln|t| - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| = ln \frac{e^x}{e^x+1}$
- $\int \arcsin\, x\, dx = \begin{vmatrix} x = \sin\, t \\ dx = \cos\, t\, dt \end{vmatrix} = \int \arcsin(\sin\, t) \cos\, t\, dt = \int t\, \cos\, t\, dt = \begin{vmatrix} u = 1 & , & u' = 1 \\ v' = \cos\, t & , & v = \sin\, t \end{vmatrix} =$

  $= t\, \sin\, t - \int\ \sin\, t\, dt = t\, \sin\, t + \underbrace{\cos\, t}_{=\sqrt{1-sin^2\, t}} = x \cdot \arcsin\, x + \sqrt{1-x^2}$

Bei der Berechnung bestimmter Integrale $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ geht man wie folgt vor:

- Berechne Stammfunktion F von f
- Berechne $F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\, dx$

31.4 Bestimmte Integration bei partieller Integration bzw. Substitution

Bei der partiellen Integration und bei der Substitution kann man beide Schritte zusammenfassen (es wird dabei *keine* Stammfunktion berechnet):

$$\int\limits_a^b uv' = uv|_a^b - \int\limits_a^b u'v \tag{673}$$

$$\int\limits_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt \tag{674}$$

Beispiele:

- $\int\limits_0^e x\, e^x\, dx = \begin{vmatrix} u = x & , & u' = 1 \\ v' = e^x & , & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x|_0^e - \int\limits_0^e e^x\, dx = xe^e - e^e + 1$
- $\int\limits_0^{\ln\, 2} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \begin{vmatrix} t = e^x & \ln\, 2 \Rightarrow e^{ln\, 2} = 2 \\ dt = e^x\, dx & 0 \Rightarrow e^0 = 1 \end{vmatrix} = \int\limits_1^2 \frac{1}{(1+t)^2}\, dt = \left.\frac{-1}{1+t}\right|_1^2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

31.5 Integration rationaler Funktionen

Dabei geht es um Integrale der Form $\int \frac{A(x)}{Q(x)}\,dx$ mit Polynomen A und Q.

Durch Nachrechnen bestätigt man:

$$\int \frac{1}{(x-a)^m}dx = \begin{cases} \ln|x-a|\,, & m=1 \\ \frac{-1}{(m-1)(x-a)^{m-1}}, & m\geq 2 \end{cases} \tag{675}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^m}dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}, & m=1 \\ \frac{2x+p}{(m-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{m-1}} + \frac{2(2m-3)}{(m-1)(4q-p^2)}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}, & m\geq 2 \end{cases} \tag{676}$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}dx = \begin{cases} \frac{B}{2}\ln(x^2+px+q) + (X-\frac{Bp}{2})\int\frac{dx}{x^2+px+q}, & m=1 \\ \frac{-B}{2(m-1)(x^2+px+q)^{m-1}} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}, & m\geq 2 \end{cases} \tag{677}$$

Zur Bestimmung von $\int \frac{A(x)}{q(x)}dx$ geht man wie folgt vor:

- Gilt $\deg A(x) \geq \deg Q(x) \Rightarrow$ Polynomdivision: $\frac{A(x)}{q(x)} = P(x) + \frac{B(x)}{Q(x)}$ mit $\deg B(x) < \deg Q(x)$
- Zerlege $Q(x)$ in unzerlegbare Polynome:

$$Q(x) = a(x-a_n)^{\nu_n}\dots(x-a_n)^{\nu_n}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\nu_s} \tag{678}$$

- Führe Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{B(x)}{Q(x)} = \frac{\dots}{(x-a_n)} + \dots + \frac{\dots}{\dots} \tag{679}$$

- Integriere die Summanden mit obigen Funktionen

Zur Bestimmung von $\int \frac{A(x)}{Q(x)}dx$ geht man wie folgt vor:

1. Gilt $deg\,A(x) \geq deg\,Q(x) \rightarrow$Polynomdivision: $\frac{A(x)}{Q(x)} = \underbrace{P(x)}_{Polynom} + \underbrace{\frac{B(x)}{Q(x)}}_{deg\,B(x)\leq deg\,Q(x)}$
2. Zerlege $Q(x)$ in unzerlegbare Polynome:
   $Q(x) = a(x-a_1)^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_r)^{\nu_r}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}$, wobei $p_i^s < 4q_i$
3. Führe die Partialzerlegung durch:

$$\frac{B(x)}{Q(x)} = \frac{\dots}{x-a_n} + \dots + \frac{\dots}{(x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}} \tag{680}$$

4. Integriere die einzelnen Summanden mit obigen Formeln.

Beispiele:

- Berechne: $\int \frac{x}{x^2-2x-3}dx$
  1. ✓
  2. $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$
  3. Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1} \quad \Rightarrow \quad x=A(x+1)+B(x-3) \tag{681}$$
$$\Rightarrow \quad x=(A+B)\,x+(A-3B) \tag{682}$$
$$\Rightarrow A+B=1 \tag{683}$$
$$A-3B=0 \tag{684}$$
$$\to \text{ LGS} \tag{685}$$
$$\Rightarrow \quad A=\frac{3}{4},\ B=\frac{1}{4} \tag{686}$$

  Damit: $\frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{\frac{3}{4}}{x-3}+\frac{\frac{1}{4}}{x+1}$

  4.

$$\int \frac{x}{x^2-2x-3}\,dx=\frac{3}{4}ln|x-3|+\frac{1}{4}ln|x+1| \tag{687}$$

-

$$\int \frac{4x^2}{(x+1)^2\,(x^2+1)^2}dx \tag{688}$$

  - Ok
  - Ok
  - Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4x^2}{(x+1)^2(x^2+^1)^2} = \tag{689}$$
$$\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} \tag{690}$$
$$\Rightarrow 4x^2=A(x+1)(x^2+1)^2+B(x^2+1)^2+ \tag{691}$$
$$+B(x^2+1)^2+(Cx+D)(x+1)^2(x^2+1)+(Ex+F)(x+1)2= \tag{692}$$
$$=(A+c)x^5+(A+B+2C+D)x^n+(2A+2C+2D+E)x^3+ \tag{693}$$
$$+(2A+2B+2C+2D+2E+F)x^2+(A+C+2D+E+2F)x+(A+B+D+F) \tag{694}$$
$$\to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1&0&1&0&0&0&0\\ 1&1&2&1&0&0&0\\ 2&0&2&2&1&0&0\\ 2&2&2&2&2&1&4\\ 1&0&1&2&1&2&6\\ 1&1&0&1&0&1&0 \end{array}\right) \to \ldots \to A=0,B=1,C=0,D=-1,E=2,F=0 \tag{695}$$
$$\Rightarrow \frac{4x^2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2} \tag{696}$$

–

$$\int \dots = \int \dots - \int \dots + \int \dots \tag{697}$$

$$\frac{-1}{x+1} - \arctan x + \frac{-2}{2(x^2+1)} + \left(\frac{-0}{2}\right) \tag{698}$$

32 Weitere Integrale und Anwendungen: Volumina, Oberflächen

32.1 Rationale Funktionen in sin und cos

berechnet man mit einer "Brechstange":

$$\int \frac{1}{\sin x} dx \tag{699}$$

Substitution:

$$t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t, \quad fx = \tfrac{2}{1+t^2} dt \tag{700}$$

$$\sin x \to \frac{2t}{t^2+1}, \quad \cos x \to \tfrac{1-t^2}{t^2+1} \tag{701}$$

Denn:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \tfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \tag{702}$$

Beispiel

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{t^2+1}{2t}\frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| \tag{703}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| \text{ oder } \int \frac{1-t^2}{t^2+1}\frac{t^2+1}{2t} dt = \text{ HA} \tag{704}$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin x} dx = \int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2} dt = 2\int \frac{4t^2}{(t^2+1)^2(t+1)^2} dx \tag{705}$$

$$= 2\left(\frac{-1}{t+1} - \arctan t - \frac{1}{t^2+1}\right) = 2\left(\frac{-1}{\tan\frac{x}{2}+1} - \frac{x}{2} - \frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}+1}\right) \tag{706}$$

32.2 Integration von Potenzreihen

Ist $f : (x_0 - 5, x_0 + 5) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ die Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, so ist f integrierbar mit Stammfunktion:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (x - x_0)^{n+1} \tag{707}$$

F hat Konvergenzradius r.
Beispiele Gegeben:

$$f : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(x+1) \tag{708}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} \overset{|x|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^2 x^n \tag{709}$$

$$\tag{710}$$

gliedweises Integrieren liefert:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \tag{711}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2) \tag{712}$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x^2} \tag{713}$$

Es gilt:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \tag{714}$$

$$\Rightarrow F(x) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \text{ ist Stammfunktion zu } f \tag{715}$$

32.3 Volumina und Oberflächen von Rotationskörpern

Wir lassen dem Graph eine Funktion: $f : \{a, b\} \to \mathbb{R}$ "rotieren" (analog geht auch um die y-Achse).

$$V_{Zyl} = \pi r^2 h = \pi f^2(\xi)(x_{k+1} - x_k) \tag{716}$$

$$\to dV = \pi f(x)^2 dx \to V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \tag{717}$$

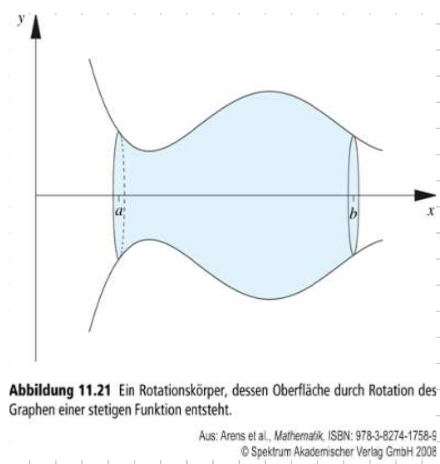


Abbildung 10: Rotierende Funktion

Beispiel: Volumen einer Kugel mit Radius r:

$$f : \{-r, r\} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \tag{718}$$

$$V_{Kugel} = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx = \pi(r^2 x - \frac{1}{3}x^3)|_{-r}^{r} = \pi \left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 + r^3 - \frac{1}{3}r^3 \right) = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{719}$$

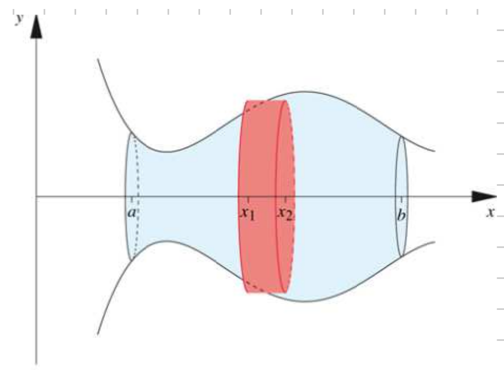


Abbildung 11.22 Annäherung des Volumens eines Rotationskörpers durch Zylinder.

Aus: Arens et al., *Mathematik*, ISBN: 978-3-8274-1758-9
© Spektrum Akademischer Verlag GmbH 2008

Abbildung 11: Rotierende Funktion

Wir approximieren die Oberfläche (= Mantelfläche) eines Rotationskörpers mit Kegelstümpfen. Mit analogen Überlegungen wie zum Volumen erhält man für die Oberfläche:

$$O_{rotkoerper} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx \tag{720}$$

Beispiel: Die Oberfläche einer Kugel mit Radius r

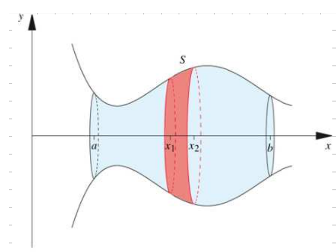


Abbildung 11.23 Annäherung der Oberfläche eines Rotationskörpers durch Kegelstümpfe.

Aus: Arens et al., Mathematik, ISBN: 978-3-8274-1758-9
© Spektrum Akademischer Verlag GmbH 2008

Abbildung 12: Approximieren der Oberfläche

$$f : \{-r, r\} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \tag{721}$$

$$O_{Kugel} = 2\pi \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{(\sqrt{r^2 - x})^2}}^{d} x = 2\pi \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2 + x^2}dx = \tag{722}$$

$$2\pi \int_{-r}^{r} rdx = 2\pi(rx|_{-r}^{r}) = 2\pi 2r^2 = 4\pi r^2 \tag{723}$$

33 Uneigentliche Integrale

Das sind Integrale über unbeschränkte Intervalle oder über über unbeschränkte Funktionen:

$$Skizzen \tag{724}$$

unbeschränkte Intervalle
unbeschränkte Funktionen

Wir definieren für $a, b \in \mathbb{R}, f : [a, \infty[\to \mathbb{R}, f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}, f :]-\infty, \infty[\to \mathbb{R}$

$$\int_a^\infty f(x)dx := \int_a^b f(x)dx \tag{725}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{726}$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx \tag{727}$$

Das sind Integrale über unbeschränkte Intervalle.

$$\int_a^c f(x)dx := \lim_{b\to c} \int_a^b \tag{728}$$

$$\int_c^b f(x)dx := \lim_{a\to c+} \int_a^b f(x)dx \tag{729}$$

Das sind die Integrale über unbeschränkte Funktionen.

Sprechweisen: Falls der jeweilige Grenzwert existiert und endlich ist, so sagt man, das uneigentliche Integral *konvergiert* / *existiert*, sonst *divergiert* / *existiert nicht*.

Beispiele

$$\int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx := \lim_{a\to 1} \int_a^e \frac{1}{x \ln x} dx = \left| \begin{matrix} t = \ln x & e \to \ln e = 1 \\ dt = \frac{1}{x} dx & a \to a \end{matrix} \right| = \lim_{a\to 1} \int_{\ln a}^1 \frac{1}{t} dt = \lim_{a\to 1} \ln t|_{\ln c}^1 = \tag{730}$$

$$\lim_{a\to 1} 0 - \ln(\ln a) = \lim_{b\to 0} -\ln(b) = \infty \tag{731}$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} = \left| \begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ u' = \frac{1}{x^2} & u = \frac{1}{x} \end{matrix} \right| = \lim_{b\to\infty} \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x}|_1^b = \lim_{b\to\infty} \underbrace{\frac{-\ln b}{b}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{b}}_{\to 0} + 0 + 1 = \tag{732}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty \tag{733}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a\to 0} - \ln a = \infty \tag{734}$$

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ \infty, & a \leq 1 \end{cases} \text{ und } \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha \geq 1 \end{cases} \tag{735}$$

33.1 Das Majoranten-Kriterium

$$f, g : [a, \infty[\to \mathbb{R} \tag{736}$$

Dann:
Falls:

$$|f(x)| \leq g(x) \forall x \in [a, \infty[\tag{737}$$

und falls $\int_a^\infty g(x)dx$ existiert, so:

$$\int_a^\infty f(x)dx \tag{738}$$

existiert auch.

Beispiel

$$\int_1^\infty \frac{1}{x+x^2} dx \text{ existiert, da } \frac{1}{x+x^2} \leq \frac{1}{x^2} \forall x \geq 1 \tag{739}$$

$$\int_0^1 \frac{1+\cos x}{x} dx \text{ existiert nicht: } \frac{1+\cos x}{x} \geq \frac{1}{x} \text{ , denn:} \tag{740}$$

$$\cos x \geq 0 \forall x \in \{0, 1\} \tag{741}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \text{ existiert, denn: } \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx \tag{742}$$

$$\forall x \geq 1 : x^2 \geq x \Rightarrow e^{x^2} \geq e^x \tag{743}$$

$$\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x} \tag{744}$$

$$e^{-x} \text{ konvergiert, da } \int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-b} + e^{-1} = \frac{1}{e} \tag{745}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \text{ existiert, da:} \tag{746}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} + \int_1^\infty dx \tag{747}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \text{ existiert, da: } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \tag{748}$$

Trick: Partielle Integration:

$$\int_1^b \frac{\sin x}{x} dx = \begin{vmatrix} u = \frac{1}{x} & u' = -\frac{1}{x^2} \\ v' = \sin x & u = -\cos x \end{vmatrix} = \frac{-cosx}{x}|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx \tag{749}$$

$$\lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx =\in \mathbb{R} \text{ , da } \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \to \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \text{ existiert} \tag{750}$$

33.2 Das Integral-Kriterium (für Reihen)

Ist $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine monoton fallende Funktion, so gilt:
Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{751}$$

konvergiert genau dann, wenn

$$\int_1^\infty f(x) dx \tag{752}$$

konvergiert.

Beispiele Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$?
Betrachte:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} \to \int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx = \begin{vmatrix} t = \ln x & b \to \ln b \\ dt = \frac{1}{x} dx & 2 \to \ln 2 \end{vmatrix} = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{t^\alpha} dt \tag{753}$$

Damit: konvergiert genau dann wenn $\alpha > 1$, da:

$$\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1} \text{ in diesem Fall} \tag{754}$$

33.3 Der Cauchy- Hauptwert

Wir haben definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^{c} f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \tag{755}$$

Uneigentliches Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a\to-\infty} \lim_{a\to-\infty} - \arctan a + \lim_{b\to\infty} \arctan b = \pi \quad (756)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xdx = \int_{-\infty}^{0} xdx + \int_{0}^{\infty} xdx \text{ existiert nicht} \quad (757)$$

Der Cauchy Hauptwert:

$$CHW : \int_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} xdx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} x^2|_{-b}^{b} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} b^2 = 0 \quad (758)$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann nennt man $CHW \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} f(x)dx$ der *Cauchy-Hauptwert von f*

Beispiel

$$CHW \int_{-\infty}^{\infty} xdx = 0 \text{ d.h. der Chauchy Hauptwert von } f(x) = x \quad (759)$$

34 Parameterabhängige Integrale

Gegeben: Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}(x,y) \to f(x,y)$ in zwei Veränderlichen x und y.
Beispiel:

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x + y^2 \sin x$
- $f : D \to \mathbb{R}, f(x,y) = y^2(x + \frac{1}{y})$ mit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \underbrace{\{(x,0,x \in \mathbb{R})\}}_{\text{x-Achse}}$

Für einen festen Wert von y haben wir eine Funktion f in x, die man eventuell über ein Intervall $a \leq x \leq b$ integrieren kann.

Wir erhalten so eine Funktion in y:

$$F(y) = \int_a^b f(x,y) \quad \underbrace{dx}_{\text{kein } x \text{ mehr}} \tag{760}$$

Beispiel:

$$f(x,y) = x + y^2 \sin x : \qquad y = 0 \Rightarrow F(0) = \textstyle\int_0^1 x dx \tag{761}$$

$$y = 1 \Rightarrow F(1) = \textstyle\int_0^1 x + \sin x dx = \frac{1}{2}x^2 - \cos x|_0^1 = \tag{762}$$

$$= \frac{1}{2} - \cos 1 + 1 \tag{763}$$

Allgemein:

$$F(y) = \int_0^1 x + y^2 \sin x dx = \frac{1}{2}x^2 - y^2 \cos x|_0^1 = \frac{1}{2} - y^2 \cos 1 + y^2 = \frac{1}{2} + y^2 (1 - \cos 1) \tag{764}$$

Wozu? $\to$ Doppelintegrale / Integraltransformationen $\to$ Laplace-Transformation / Fourier-Transformation
Es gilt:

- f stetig $\Rightarrow$ F stetig
- f stetig diffbar nach $y \Rightarrow F$ ist stetig diffbar, und es gilt:

$$\frac{dF}{dy}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dx \tag{765}$$

Man beachte:

- f ist eine Funktion in x und y $\to$ stetig? (später)
- Was ist $\frac{\partial f}{\partial y}$? $\to$ später

Beispiel: für partielles Ableiten nach y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y + \frac{1}{2}\sin y + e^x\right) = x^2 + \frac{1}{2}\cos y \tag{766}$$

Wir schreiben t anstelle von y. **Beispiel:**

$$F(t) := \int_0^{\ln 2} \underbrace{2t^2 e^{-x} - 4te^{-2x}}_{f(x,t)} dx = -2t^2 e^{-x} + 2te^{-2x}|_0^{\ln 2} = -t^2 + \frac{1}{2}t - +2t^2 - 2t = t^2 - \frac{3}{2}t \quad (767)$$

$$\to \frac{dF}{dt}(t) = 2t - \frac{3}{2} \quad (768)$$

Und:

$$\frac{dF}{dt}(t) = \int_0^{\ln 2} \frac{\partial}{\partial t} \left(2t^2 e^{-x} - 4te^{-2x}\right) dx = \int_0^{\ln 2} 4te^{x} - 4e^{-2x} dx = -4te^{-x} + 2e^{2x}|_0^{\ln 2} = \quad (769)$$

$$= -2t + \frac{1}{2} + 4t - 2 = 2t - \frac{3}{2} \quad (770)$$

Doppelintegrale:
Stetige Funktionen sind integrierbar:
f stetig $\Rightarrow$ F stetig $\Rightarrow \int_c^d F(y)dy$ kann man berechnen:

$$\to \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy \quad (771)$$

Beispiel:

$$f(x,y) = xy^2, a = 0, b = 1, c = -1, d = 1 \to \int_{-1}^1 \int_0^1 xy^2 dxdy = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^2y^2|_{x=0}^1 dy = \quad (772)$$

$$= \int_{y=1}^1 \frac{1}{2}y^2 dy = \frac{1}{6}y^3|_{-1}^1 = \frac{1}{3} \quad (773)$$

Andersrum:

$$\int_{x=0}^1 \int_{b=-1}^1 xy^2 dydx = \int_{x=0}^1 \frac{1}{3}xy^3|_{b=1}^1 dx = \int_0^1 \frac{2}{3}xdx = \frac{1}{3}x^2|_0^1 = \frac{1}{3} \quad (774)$$

Satz von Fubini:

$$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R} \text{ stetig } \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx \quad (775)$$

34.1 Laplace-Transformation

Wir haben:

- Uneigentliche Integrale

$$\int_0^\infty f(t)dt \quad (776)$$

- parameterabhängige Integrale

$$F(s) = \int_a^b f(t,s)dt \quad (777)$$

Nun betrachten wir beides zusammen:
Gegeben:

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R} \tag{778}$$

integrierbar auf jedem endlichen Intervall $[0, \mu]\,, \mu \in \mathbb{R}$
Man nennt dann:

$$\mathcal{L}\ f(s) = F(s) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st} f(t)}_{\tilde{f}(t,s)} dt \tag{779}$$

die *Laplace-Transformierte von f*

Die Laplace-Transformation ist die Abbildung, die einem $\int$ die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}\ f$ zuordnet:

Beispiel:

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, f(t) = 1 \tag{780}$$

$$\mathcal{L}\ f(t) = \int_b^\infty e^{-st} 1 dt \tag{781}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-bt} dt = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s} e^{-st}|_{t=0}^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s} e^{-sb} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \Rightarrow \mathcal{L}\ f(s) = \frac{1}{s} \text{ für } f : t \to 1 \tag{782}$$

$$\exp : [0, \infty[\to \mathbb{R} \to \mathcal{L}\ \exp(s) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st} e^t}_{e^{(1-s)t}} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(1-s)t} dt = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-s} e^{(1-s)t}|_0^b \tag{783}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-s} e^{(1-s)b} + \frac{1}{s-1} \stackrel{s\geq 1}{=} \frac{1}{s-1} \Rightarrow \ \exp(s) = \frac{1}{s-1} \tag{784}$$

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, f(t) = t^n \Rightarrow \mathcal{L}\ f(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{785}$$