Höhere Mathematik 2

1 Nützliches Wissen $e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i} \cdot \sin(x)$

1.1 Trigonometrische Funktionen

1.1.1 sinh, cosh $\quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \operatorname{arsinh} x := \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \operatorname{arcosh} x := \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cosh x + \sinh x = e^x$	$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$
$\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}$	$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$
$\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$	

1.1.2 sin, cos $\quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$	$\int x \cos(x) \, \mathrm{d}x = \cos(x) + x \sin(x)$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\int x \sin(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) - x \cos(x)$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\int \sin^2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \sin(x)\cos(x)\right)$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\int \cos^2(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \sin(x)\cos(x)\right)$
$\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$	$\int \cos(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$

1.2 log $\quad \log(1) = 0$

$a^x = e^{x \ln a} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad \ln x \leq x - 1$

1.3 Integrale:

- Partielle Integration: $\int u v' = uv - \int u' v$
- Substitution: $\int f(\underbrace{g(x)}_{t}) \underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int f(t)\,\mathrm{d}t$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{x^3}}{3}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x\ln(x) - x$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x	e^x
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left\lvert 1+x^2 \right\rvert$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$e^{(x)}(x-1)$	$x \cdot e^{(x)}$	$e^x(x+1)$
$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}x + \sinh^{-1}(x)\right)$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1.4 Determinante von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$: $\det(A) = |A|$

$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$

Hat $\boldsymbol{A}$ 2 linear abhäng. Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$

Entwicklung. n. $i$ter Zeile: $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$

1.5 Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q^n \overset{|q|<1}{=} \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

Harmonische Reihe — Geometrische Reihe — Exponentialreihe

2 Lineare Abbildungen

$f : V \to W$ heißt linear, falls

- $f(v + w) = f(v) + f(w)$ und $f(\lambda v) = \lambda f(v)$
- ODER: $f(\lambda v + w) = \lambda f(v) + f(w)$
- Tipp: Prüfe ob $f(0) = 0$

Kern von f: $\ker(f) = \left\{ v \in V \,\middle|\, f(v) = 0 \right\}$ ist UVR von V

Bild von f: $\mathrm{Bild}(f) = \left\{ f(v) \,\middle|\, v \in V \right\}$ ist UVR von W

Defekt von f: $\dim(\ker(f)) = \mathrm{def}(f)$

Rang von f: $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = \mathrm{rg}(f)$

Injektiv falls $\ker(f) = \{0\}$ bzw. $\mathrm{def}(f) = 0$

Surjektiv Alle Werte im Zielraum werden angenommen.

Bijektiv Injektiv und Surjektiv

2.1 Dimensionen

$$\boxed{\begin{aligned} \dim(V) &= \dim\left(\ker(f)\right) + \dim\left(\mathrm{Bild}(f)\right) \\ \dim(V) &= \mathrm{def}(f) + \mathrm{rg}(f) \end{aligned}}$$

Falls $\dim(V) = \dim(W)$, so gilt:

f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv.

2.2 Darstellungsmatrizen

...beschreiben eine lineare Abbildung zwischem zwei endlichdimensionalen Vektorräumen.

Sonderfälle:

${}_{\boldsymbol{E_n}}\boldsymbol{M(f)}_{\boldsymbol{E_n}} = \boldsymbol{A} \quad \| \quad {}_{\boldsymbol{E_n}}\boldsymbol{M(id)}_{\boldsymbol{B'}} = \boldsymbol{B'}$

Koordinatenvektor ${}_B v$ von $v = \lambda_1 \underline{\boldsymbol{b}}_1 + \ldots + \lambda_n \underline{\boldsymbol{b}}_n$ bezüglich $\boldsymbol{B}$:

${}_B v := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$

Darstellungsmatrix von f bzgl. der Basen B in C

${}_C M(f)_B = ({}_C f(b_1) \quad {}_C f(b_2) \quad \ldots \quad {}_C f(b_n)) \in K^{m \times n}$

Darstellungsmatrizen bei Verkettungen von linearen Abbildungen $\underbrace{{}_D M(g \circ f)_B}_{r \times n} = \underbrace{{}_D M(g)_C}_{r \times m} \cdot \underbrace{{}_C M(f)_B}_{m \times n}$

2.3 Die Basistransfomationsformel

$$\boxed{{}_{C'} M(f)_{B'} = {}_{C'} M(id)_C \cdot {}_C M(f)_B \cdot {}_B M(id)_{B'}}$$

Bestimmung von ${}_{C'} M(id)_C$: LGS: $\left(C' | C\right) \xrightarrow{EZF} \left(E_n | {}_{C'} M(id)_C\right)$

für $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} = \boldsymbol{K}^n$ und $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_n$

$f : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K}^n, f(v) = \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{v}}$

${}_{\boldsymbol{B'}}\boldsymbol{M(f)}_{\boldsymbol{B'}} = {}_{\boldsymbol{B'}}\boldsymbol{M(id)}_{\boldsymbol{E_n}} \cdot {}_{\boldsymbol{E_n}}\boldsymbol{M(f)}_{\boldsymbol{E_n}} \cdot {}_{\boldsymbol{E_n}}\boldsymbol{M(id)}_{\boldsymbol{B'}} = \boldsymbol{B'}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B'}$

3 Eigenwerte, Eigenvektoren

Eigenwerte: $\det(\boldsymbol{A} - \lambda E_n) = 0$, Det-Entwickl., Polynom-Div.

$\Rightarrow \chi_A = (\lambda_1 - \chi)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_r - \chi)^{\nu_r} \quad \nu_i = \mathrm{alg}(\lambda_i)$

Eigenvektoren: $\mathrm{Eig}_A(\lambda_i) = \ker(\boldsymbol{A} - \lambda_i E_n) = v_i$

$\to \dim(\mathrm{Eig}_A(\lambda_i)) = \mathrm{geo}(\lambda_i) \quad \forall i : 1 \leq \mathrm{geo}(\lambda_i) \leq \mathrm{alg}(\lambda_i)$

$\boxed{\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{v}} = \lambda \underline{\boldsymbol{v}}}$ mit $\underline{\boldsymbol{v}}$ EV von $\boldsymbol{A}$

<u>Ähnlichkeit von Matrizen:</u> Matrizen A und B sind ähnlich, wenn

- sie die gleichen Eigenwerte besitzen
- die algebraischen mit den geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte übereinstimmen
- Es gilt: $\det A = \det B$

3.1 Diagonalmatrix

<u>Bedingungen für Diagonalisierbarkeit:</u>

- Das charakteristische Polynom χ_A zerfällt in Linearfaktoren
  $\chi_A(t) = (\lambda_1 - t)^{k_1}(\lambda_2 - t)^{k_2} \ldots (\lambda_r - t)^{k_r}$
- Die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte stimmen mit den geometrischen überein
  $k_i = \dim V_{\lambda_i}$
- Jede **symmetrische** Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist diagonalisierbar

$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} &= [\underline{\boldsymbol{EV}}_1, \underline{\boldsymbol{EV}}_2, \ldots] \end{aligned}$

Spur einer Matrix: Spur(A) $= \Sigma$ EW von A

Produkt der EW: $\det(A) = \Pi$ EW von A

4 Quadriken

$$\boxed{x^\top A x + b^\top x + c = 0}$$

1) Hauptachsentrafo

- EW
- EV $\to$ Normieren EV $\to$ ONB
- $(*)$ $\underbrace{\lambda_1}_{EW} y_1^2 + \ldots + \underbrace{d_1}_{d^\top = b^\top B} y_1 + \ldots + c = 0$

2) Translation (lineare Terme)

- $\lambda_i \neq 0$ UND $d_i \neq 0 \to z_i = y_i + \frac{d_i}{2\lambda_i}$
- $\lambda_i = 0$ ODER $d_i = 0 \to z_i = y_i$
- $(**)\lambda_1 z_1^2 + \ldots + d_1 z_1 + \ldots + e = 0$

3) Translation (Konstanten)

- $d_k \neq 0, k > r, \to \tilde{z}_k = z_k + \frac{e}{d_k}$, sonst $\tilde{z}_i = z_i$
- $(***)\lambda_1 \tilde{z}_1^2 + \ldots + d_1 \tilde{z}_1 + \ldots = 0$

4) Normalform

- x_i anstatt $\tilde{z}_i$ bzw. z_i
- evtl. Vertauschen oder Multiplikation
- $\to$ Tabelle

5 Definitheit und Normen

Ist V ein $\mathbb{R}$-VR, so ist $\|.\| : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$ eine Norm, falls

- Definitheit: $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- Homogenität: $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- Dreiecks-Ungleichung: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

5.1 l^p-Normen für $v \in \mathbb{K}^n$

$p = 1$ **Betragsnorm:** $\|v\|_1 = |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n|$

$p = 2$ **Euklidische Norm:** $\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

$p \to \infty$ **Maximumsnorm:** $\|v\|_\infty = \max\left\{|v_i| \,\middle|\, i \in \{1, \ldots, n\}\right\}$

5.2 Matrixnormen für $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

Man nennt eine Matrixnorm $\|.\|$ des $\mathbb{K}^{n \times n}$

- **submultiplikativ**, falls $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$
- **verträglich** mit einer Vektornorm $\|.\|_V$ des $\mathbb{K}^n$, falls

$$\|Av\|_V \leq \|A\| \cdot \|v\|_V \quad \forall v \in \mathbb{K}^n, \forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

- **natürlich** bzw. **induziert** durch eine Vektornorm $\|.\|_V$ des $\mathbb{K}^n$, falls

$$\|A\| := \sup \frac{\|Av\|_V}{\|v\|_V} \qquad V \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \qquad \|E_n\| = 1$$

Frobeniusnorm: $\|A\|_F = \sqrt{\Sigma_{j=1}^n \Sigma_{i=1}^n a_{ij}^2}$

Zeilensummennorm $\|A\|_{(\infty)} = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Spaltensummennorm: $\|A\|_{(1)} = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

Spektralnorm: $\|A\|_{(2)} = \sqrt{\lambda_{max}}$ (max. EW von $A^\top \cdot A$)

5.3 Definitheit

Eine sym. Matrix $A = A^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt

$\begin{smallmatrix}\text{pos.}\\\text{neg.}\end{smallmatrix}$ definit $\Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \underline{\boldsymbol{v}}^\top \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{v}} \gtrless 0 \Leftrightarrow$ Alle EW $\lambda \gtrless 0$

$\begin{smallmatrix}\text{pos.}\\\text{neg.}\end{smallmatrix}$ semi definit $\Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n : \underline{\boldsymbol{v}}^\top \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{v}} \gtreqless 0 \Leftrightarrow$ Alle EW $\lambda \gtreqless 0$

indefinit $\Leftrightarrow \exists v, w \in \mathbb{R}^n : \underline{\boldsymbol{v}}^\top \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{v}} < 0 \wedge \underline{\boldsymbol{w}}^\top \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{w}} > 0 \Leftrightarrow \exists \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 < 0$

Alle EW von $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\top$ sind reel. $\lambda \in \mathbb{R}$ selbst wenn EV $v \in \mathbb{C}$!

Überprüfung mit $\det \boldsymbol{A} = \Pi \lambda_i \qquad \mathrm{Spur}\boldsymbol{A} = \Sigma \lambda_i$

Sonderfall: 2×2 Matrix und $A^\top = A$ (symmetrisch)

indefinit $\Leftrightarrow \det A < 0$

$\begin{smallmatrix}\text{pos.}\\\text{neg.}\end{smallmatrix}$ semidefinit $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Spur} \gtrless 0$

$\begin{smallmatrix}\text{pos.}\\\text{neg.}\end{smallmatrix}$ definit $\Leftrightarrow \det A > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Spur} \gtrless 0$

6 Skalarfelder

Ein Skalarfeld ordnet jedem Vektor eines Vektorraums einen Wert zu.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$

Teilmengen von $\mathbb{R}^n$: $D = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$

Offene Kugelmenge vom Radius r: $B_r(x_0)$

Topologische Begriffe für $D \subseteq \mathbb{R}^n$

- Das Komplement D^C von D: $D^C := \mathbb{R}^n \setminus D$
- innerer Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ des Inneren $\mathring{D}$ von D, falls
  $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|x - x_0\| < \varepsilon\right\} \subseteq D$
- Die Menge D heißt offen, falls $D = \mathring{D}$
- Randpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ des Rands ∂D von D, falls $\forall \varepsilon > 0$:
  $B_\varepsilon(x_0) \cap D \neq \emptyset \ \wedge \ B_\varepsilon(x_0) \cap D^C \neq \emptyset \ \Rightarrow \ \partial D = \partial D^C$
- Abschluß $\overline{D}$ von D: $\overline{D} = D \cup \partial D$
- Die Menge D ist abgeschlossen, falls $\partial D \subseteq D$
- beschränkt, falls $\exists \mu \in \mathbb{R} \forall x \in D : \|x\| < \mu$
- kompakt, falls D abgeschlossen und beschränkt ist.

Es gilt: Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so ist D^C abgeschlossen.

$\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind offen und abgeschlossen.

6.1 Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$

Eine Folge $\left(X^{(k)}\right)$ ist eine Abbildung $\left(X^{(k)}\right) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^n, k \mapsto x^{(k)}$

Die Folge konvergiert, falls $\lim_{k \to \infty} \|x - x^{(k)}\| = 0$

Folge konvergiert, falls sie komponentenweise konvergiert!

Für $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bedeutet

Grenzwert: $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = c \Leftrightarrow f\left(X^{(k)} \to x_0\right) \to c$

Stetigkeit: $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Satz von Max. und Min.: Ist $f(\underline{\boldsymbol{x}})$ stetig und D kompakt, so

$\exists x_{max}, x_{min} \in D \forall x \in D : f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$

6.2 Differentiation von Skalarfeldern - Gradient

$$\nabla f(x) = \mathrm{grad}\left(f(x)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung: $\boxed{\partial_{\underline{\boldsymbol{v}}} f(x) = \langle \nabla f(x), \underline{\boldsymbol{v}} \rangle} \qquad \boxed{\|\underline{\boldsymbol{v}}\| = 1}$

Gradientenregeln: $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind partiell diffbar:

Linearität: $\nabla(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \nabla f(x) + \mu \nabla g(x)$

Produkt: $\nabla(f \cdot g)(x) = g(x)\nabla f(x) + f(x)\nabla g(x)$

Quotient: $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}\left(g(x)\nabla f(x) - f(x)\nabla g(x)\right)$

Kettenregeln:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \wedge g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \wedge g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$h := g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	$h := f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\boxed{\nabla h(x) = g'\left(f(x)\right) \cdot \nabla f(x)}$	$\boxed{h'(x) = \nabla f\left(g(x)\right)^T \cdot \dot{g}(t)}$

6.3 Höhere Partielle Ableitungen $\partial_j \partial_i f(x) = f_{x_i x_j}(x)$

$\mathcal{C}^m(D) = \left\{\text{m-mal stetig partiell diffbare Funktion auf D}\right\}$

Satz von Schwarz: $f \in \mathcal{C}^2(D) \Rightarrow f_{x_i x_j}(x) = f_{x_j x_i}(x) \quad \forall i, j$

Mittelwertsatz ($f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, xy \in D \quad x, y \subseteq D$)

$\exists \xi \in \overline{x, y}$ mit $f(y) - f(x) = \nabla f^\top(\xi)(y - x)$

Es gilt $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|$ mit $c = \max\|\nabla f(z)\| \quad z \in \overline{x, y}$

Hessematrix: $H_f(x) = \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(x) & \ldots & \partial_{1n} f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n1} f(x) & \ldots & \partial_{nn} f(x) \end{bmatrix}$

Die Hessematrix ist symmetrisch, falls $f \in \mathcal{C}^2(D)$

6.4 Jacobimatrix = Fundamentalmatrix

$$\boldsymbol{J}_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1^\top \\ \vdots \\ \nabla f_m^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Rechenregeln für die Jacobimatrix:

$f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ part. diffbar:

Linearität: $\boldsymbol{J}_{\alpha f + \beta g} = \alpha J_f + \beta J_g$

Komposition: $\boldsymbol{J}_{g \circ f}(x) = \boldsymbol{J}_g\left(f(x)\right) \cdot \boldsymbol{J}_f(x)$

6.5 Anwendung - Taylorentwicklung und Newton

$$T_{2,f,\underline{x}_0}(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) +$$
$$+\nabla f(\underline{x}_0)^\top(\underline{x}-\underline{x}_0)+ \qquad \text{(Tangentialebene)}$$
$$+\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{x}_0)^\top \underline{H}_f(x_0)(\underline{x}-\underline{x}_0) \qquad \text{(Schmiegequadrik)}$$

$T_{3,f,\underline{a}}(\underline{x}) = f(\underline{a})+\Sigma\,\partial_i f(\underline{a})(x_i-a_i)+\frac{1}{2}\Sigma\,\partial_i\partial_j f(\underline{a})(x_i-a_i)(x_j-a_j)+\frac{1}{6}\Sigma\,\partial_i\partial_j\partial_k f(\underline{a})(x_i-a_i)(x_j-a_j)(x_k-a_k)$

Newton: $x_{k+1} = x_k - (Df(x_k))^{-1}\cdot f(k_x)$

6.6 Extremwerte von Skalarfeldern $f(\underline{x})$

6.6.1 Extremewerte ohne NB

- Suche Kandidaten (stationäre Punkte): $\{\underline{x}_0\} : \nabla f(\underline{x}_0) = 0$
- Falls $H_f(\underline{x}_0) \begin{cases} \text{neg. definit} & \Rightarrow \underline{x}_0 = \text{lok. Max.} \\ \text{pos. definit} & \Rightarrow \underline{x}_0 = \text{lok. Min.} \\ \text{indefinit} & \Rightarrow \underline{x}_0 = \text{Sattelpunkt} \\ \text{semidefinit} & \Rightarrow \underline{x}_0 = \text{keine Aussage} \end{cases}$
- globale Extreme $\rightarrow$ prüfe Rand

6.6.2 Extremwerte von $f(\underline{x})$ mit Nebenbedingung

Es seien $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

- NB $g(x) = 0$ ist nach einer Variable auflösbar.
  $\rightarrow$ Setze x_i in $f(x)$ ein $\rightarrow$ Bestimme EW
- Lagrange-Funktion
  Nebenbedingung $g(x) = 0$
  $\boxed{L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x)}$
  - Regularitätsbedingung:
    $\nabla g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$
  - Kandidaten:
    $\nabla L(x,\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x) + \lambda\nabla g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$
  - Vergleiche die Funktionswerte der Kandidaten
    $\rightarrow$Entscheidung über Extrema (auch Rand betrachten)

6.7 Differentialoperatoren

Operator	Definition
Gradient: $\mathrm{grad}\ f$ S-Feld $\rightarrow$ V-Feld	$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$
Divergenz: $\mathrm{div}\ f$ V-Feld $\rightarrow$ S-Feld	$\nabla^\top \cdot f = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$
Rotation: $\mathrm{rot}\ f$ V-Feld $\rightarrow$ V-Feld	$\nabla \times f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y}(x) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x) \end{pmatrix}$
Laplace: $\Delta\ f$ S-Feld $\rightarrow$ S-Feld	$\nabla^{\top}\cdot(\nabla f)^{\nabla^2} = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i x_i}$

6.8 Formeln für Differentialoperatoren

- $div(rot(v)) = 0$
- $div(\nabla f) = \Delta f$
- $\nabla(div(v)) = rot(rot(v)) + \Delta v$
- $rot(\nabla f) = 0$
- $rot(g\nabla g) = 0$

7 Koordinatensysteme

Um einen Vektor in anderen Koordinaten darzustellen:

	$(x \quad y \quad z)^\top$	
Zylinder	$\begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$	$0 \leq \varphi < 2\pi$
Kugel	$\begin{pmatrix} r\cdot\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cdot\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cdot\cos(\theta) \end{pmatrix}$	$0 \leq \theta \leq \pi$ $0 \leq \varphi < 2\pi$

Zur Basistransformation: Transformationsmatrix $\underset{\sim}{S}$	$f_{\text{kath}} =$
$\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\underset{\sim}{S}_Z \cdot f_{\text{zyl}}$
$\begin{bmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \cos(\varphi) & \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \end{bmatrix}$	$\underset{\sim}{S}_k \cdot f_{\text{kugel}}$

Die Spalten entsprechen den orthonormalen Basisvektoren im jeweiligen Koordinatensystem.

$\Rightarrow$ Trafo-Matrizen orthogonal: $\underset{\sim}{S}^{-1} = \underset{\sim}{S}^\top$

	Zylinderkoordinaten
∇	$(\partial_r,\ \frac{1}{r}\partial_\varphi,\ \partial_z)^\top$
div	$\frac{1}{r}\partial_r(r\cdot\underline{f}_r) + \frac{1}{r}\partial_\varphi(\underline{f}_\varphi) + \partial_z(\underline{f}_z)$
Δ	$\frac{1}{r}\partial_{rr}(r\cdot f) + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi}f + \partial_{zz}f$

	Kugelkoordinaten
∇	$(\partial_r,\ \frac{1}{r}\partial_\varphi,\ \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta)^\top$
div	$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\underline{f}_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi(\underline{f}_\varphi) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\underline{f}_\theta)$
Δ	$\frac{1}{r^2}\partial_{rr}(r^2 f) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}(\sin\theta f) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_{\theta\theta}f$

7.1 Jacobi-Determinante

Zyl. $\Rightarrow \det D\Phi(r\phi, z) = r$

Kug. $\Rightarrow \det D\Phi(r, \phi, \theta) = -r^2\sin\theta$

8 Implizite Funktionen g

... werden als Nullstellenmenge einer expl. Funktion f angegeben.

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ mit $y = g(x) \in \mathbb{R}$

8.1 Satz über implizite Funktionen:

Es gelte: $f : D \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \rightarrow$ implizite Gleichung $f(x,y) = 0$
Bedinungen:

- D ist offen
- $f \in C^1(D)$
- $\exists(x_0, y_0) \in D$ mit $f(x_0, y_0) = 0$
- $f_y(x_0, y_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists I \subseteq \mathbb{D} : I = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), J \subseteq \mathbb{R} : J = (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ mit:

- $I \times J \subseteq D$ in $f_y(x,y) \neq 0 \forall(x,y) \in I \times y$
- $\exists_1$ Funktion $g(x)$ mit $f(x,y) = 0$ ("g wird implizit defniert")
- $g'(x) = \frac{-f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))} = \frac{-f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \quad \forall x \in I$

$$g''(x) = -\frac{f_{xx}(x,g(x))+2f_{xy}(x,g(x))\cdot g'(x)+f_{yy}(x,g(x))\cdot(g'(x))^2}{f_y(x,g(x))}$$

8.2 Satz über implizite Funktionen (allgemein)

$f : \mathbb{R}^{k+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diffbar,

$z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{k+m}$ $x_0 \in \mathbb{R}^k$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $f(z_0) = 0$

Falls $J_{f,y} = (\frac{\partial f_{i(z_0)}}{\partial x_j})_{i=1\ldots m j=k+1\ldots k+m}$ ist invertierbar $(\det J_{f,y}(z_0) \neq 0)$

Dann: $\exists$ offende Menge I in J mit $g : I \rightarrow J$ mit $f(x, g(x)) = 0$

Mehrdimensional: $Df(x) = -(DF_y(x, f(x))^{-1}DF_x(x, f(x))$

gesucht $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$

9 Kurven

Eine Kurve ist ein eindimensionales Objekt.

$\underline{\gamma} : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$ (Funktionenvektor)

- $\mathcal{C}^0$-Kurve: Positionsstetigkeit (geschlossene Kurve)
- $\mathcal{C}^1$-Kurve: Tangentialstetigkeit (stetig diffbar)
- $\mathcal{C}^2$-Kurve: Krümmungsstetigkeit (2 mal stetig diffbar)
- regulär, falls $\forall t \in [a,b] : \dot{\gamma}(t) \neq \underline{\mathbf{0}}$ (Keine Knicke)

Besondere Punkte von Kurven:

- Singulär, falls $\dot{\gamma}(t) = \underline{\mathbf{0}}$ (Knick)
- Doppel-punk, falls $\exists t_1, t_2 : t_1 \neq t_2 \ \wedge\ \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$
- Horizontaler Tangentenpunkt, falls $\dot{\gamma}_1(t) \neq 0 \ \wedge\ \dot{\gamma}_2(t) = 0$
- Vertikaler Tangentenpunkt, falls $\dot{\gamma}_1(t) = 0 \ \wedge\ \dot{\gamma}_2(t) \neq 0$
- Tangetenvektor/Geschwindigkeitsverktor: $\dot{\gamma}(t)$
- Geschwindigkeit zur Zeit t: $\|\dot{\gamma}(t)\|$

Bogenlänge einer Kurve: $L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\mathrm{d}t$

Umparametrisierung γ nach Bogenlänge ($\tilde{\gamma}$):

- Bogenlängenfunktion: $s(t) = \int\limits_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\|\mathrm{d}\tau$
  $s : [a,b] \rightarrow [0, L(\gamma)], t \mapsto s(t)$
- $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s^{-1}(t)) \qquad \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = 1\forall t$

Tangenteneineitsvektor an $\gamma(t) : T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$

Binormaleneineitsvektor an $\gamma(t) : B(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\times\ddot{\gamma}(t)\|}$

Hauptnormaleneinheitsvektor: $N(t) = B(t) \times T(t)$

Krümmung von γ: $\kappa(t) = \|\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}s^2}\| = \frac{\|\dot{T}(t)\|}{s'(t)}$

Vereinfachung für $n = 2$: $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$

$$\boxed{L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ \mathrm{d}t \qquad \tilde{\kappa}(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

Leibniz'sche Sektorformel $F(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)dt$

9.1 Skalares Kurvenintegral

von Skalarfeld $f(\underline{x})$ entlang einer Kurve $\underline{\gamma}(t)$ mit $\underline{x}, \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\int\limits_\gamma f\ \mathrm{d}s := \int\limits_a^b f(\underline{\gamma}(t)) \cdot \|\dot{\underline{\gamma}}(t)\|\mathrm{d}t}$$

Im Fall $n = 2$ gibt $\int\limits_\gamma f\ \mathrm{d}s$ den Flächeninhalt unter f entlang der Spur von $\underline{\gamma}$ an.

$L(\underline{\gamma})$ ist das skalares Kurvenintegral über $f = 1$

Anmerkung: Ist $\varrho(x,y,z)$ die Masse- oder Ladungsdichte eines Drahtes so ist die Gesamtmasse M:

$\int\limits_\gamma f\ \mathrm{d}s = \int\limits_a^b \varrho(\underline{\gamma}(t)) \cdot \|\dot{\underline{\gamma}}(t)\|\mathrm{d}t$

Der Schwerpunkt $\underline{\boldsymbol{S}} = (S_1, S_2, S_3)$ ist: $S_i = \frac{1}{M(\underline{\gamma})} \cdot \int\limits_\gamma x_i\varrho\ \mathrm{d}s$

9.2 Vektorielles Kurvenintegral

von einem Vektorfeld $\underline{v}(\underline{x})$ längs der Kurve $\underline{\gamma}$ mit $\underline{x}, \underline{v}, \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\int \underline{v} \cdot \mathrm{d}\underline{s} := \int\limits_a^b \underline{v}(\underline{\gamma}(t))^\top \cdot \dot{\underline{\gamma}}(t)\ \mathrm{d}t}$$

Für beide Integrale gilt:
$\forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g$
$\int\limits_{\underline{\gamma}} \lambda f + \mu g\ \mathrm{d}s = \int\limits_{\underline{\gamma}} \lambda f\ \mathrm{d}s + \int\limits_{\underline{\gamma}} \mu g\ \mathrm{d}s$

9.3 Integrabilitätsbedingung (Gradientenfeld)

$\Rightarrow$ Kurve muss einfach zusammenhängend sein.
(Man muss die Kurve auf einen Punkt zusammenziehen könnnen)

$f : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ist ein Gradientenfeld, wenn $f(x) = \nabla F(x)$

$\Leftrightarrow \boxed{J_f(x) = J_f(x)^T}$ bzw. $\partial_{x_i} f_j(x) = \partial_{x_j} f_i(x)$

Sonderfälle:

- $n = 2$: $\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}$
- $n = 3$: $\mathrm{rot}\ v = 0 \Rightarrow$ Integrabilitätsbedinung ist erfüllt.

Ist v Gradientenfeld, so gilt:
$\oint\limits_\gamma v \cdot ds = 0$
$\int\limits_\gamma v \cdot ds$ ist wegunabhängig

10 Flächen und Flächenintegrale

10.1 Flächen

$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$

10.2 Skalares Flächenintegral

$$\boxed{\iint\limits_\Phi f\ \mathrm{d}s := \iint\limits_B f(\Phi(u,v)) \cdot \|\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\|dudv}$$

10.3 Vektorielles Flächenintegral

$$\boxed{\iint\limits_\Phi v \cdot\ \mathrm{d}s := \iint\limits_B (v(\Phi(u,v)))^T \cdot (\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v))dudv}$$

11 Transformationsformel

$$\boxed{\begin{gathered}\int\limits_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n = \\ \int\limits_B f(\Phi(y_1, \ldots, y_n))|detD\Phi(y_1, \ldots, y_n)|dy_1 \ldots dy_n\end{gathered}}$$

12 Integralsätze

12.1 Ebener Green

$$\boxed{\iint\limits_B \frac{\delta v_2}{\delta x} - \frac{\delta v_1}{\delta y}dxdy = \int\limits_{\delta B} v \cdot ds = \sum\limits_{i=1}^{k}\int\limits_{\gamma_i} v \cdot ds}$$

δB positiv parametrisiert; Richtung ändern:$\gamma[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2 : \gamma(t) = \gamma(a+b-t)$

12.2 Ebener Gauss

$$\boxed{\iint\limits_B \mathrm{div}\ vdxdy = \int\limits_{\delta B} v^T \cdot nds = \sum\limits_{i=1}^{k}\int\limits_{\gamma_i} v^T \cdot n_i ds}$$

n=Normalenvektor: $\dot{\gamma} = \binom{a}{b}$; $n = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \binom{b}{-a}$

12.3 Div.Satz Gauss

$$\boxed{\iiint\limits_B \mathrm{div}\ vdxdydz = \iint\limits_{\delta B} v \cdot ds}$$

$\Phi_u \times \Phi_v$ zeigt nach unten

12.4 Stokes

$$\boxed{\iint\limits_\Phi \mathrm{rot}\ v \cdot ds = \int\limits_{\delta\Phi} v \cdot ds}$$

$\delta\Phi$ positiv parametrisiert bzgl. $\Phi_u \times \Phi_v$; Φ regulär

13 DGL

13.1 Trafo auf System 1.Ordnung

$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = s(t)$

$\dot{z} = Az + s$

$z_0 = x^{(0)}, z_1 = x^{(1)} = \dot{z}_0, z_2 = x^{(2)} = \dot{z}_1, \cdots, z_{n-1} = x^{(n-1)} = \dot{z}_{n-2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s(t) \end{pmatrix} \dot{z} = \begin{pmatrix} z'_0 \\ z'_1 \\ \vdots \\ z'_{n-2} \\ z'_{n-1} \end{pmatrix}$$

13.2 Lösen von linearen DGL-Systemen

13.2.1 e-Funktion für Matrizen

- $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} mitAB = BAgilt : e^{A+B} = e^Ae^B$
- $S^{-1}e^AS = e^{S^{-1}AS}$
- $e^A = S \cdot diag(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}) \cdot S^-1$
- $e^A = S \cdot diag(e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}) \cdot (E_n + N + \frac{1}{2}N^2 + \cdots) \cdot S^{-1}$
  (falls Matrix nicht diag'bar)

13.2.2 Lösung des Systems

- geg. $\dot{x} = A \cdot x$ bzw $\dot{x} = A \cdot x$ mit $x(t_0) = v$
- allg. kompl. Lsg:$x_a(t) = c_1e^{\lambda_1 t}v_1 + \cdots + c_ne^{\lambda_n t}v_n, c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$
- allg. reelle Lsg:$\bar{\lambda}$ wegstreichen, ersetze $ce^{\lambda t}vmitd_1e^{at}(\cos btRe(v) - \sin btIm(v)) + d_2e^{at}(\sin(bt)Re(v) + \cos(bt)Im(v))$
- bestimme$c_1, \cdots, c_n$ aus $x_a(t_0) = c_1e^{\lambda_1 t_0}v_1 + \cdots + c_ne^{\lambda_n t_0}v_n = x_0$
- erhalte als Lsg des AWPs $x(t) = c_1e^{\lambda_1 t_0}v_1 + \cdots + c_ne^{\lambda_n t_0}v_n$

Falls Matrix nicht diag'bar:

- berechne: $e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1}$ bzw. $e^{(t-t_0)A} = Se^{(t-t_0)J}S^{-1}$
- erhalte die Lsg:$x(t) = e^{tA} \cdot c, c \in \mathbb{R}^n$ bzw $x(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot v$