Höhere Mathematik 3

1. Nützliches Wissen $e^{\mathrm{j}x} = \cos(x) + \mathrm{j}\cdot\sin(x)$

1.0.1 sinh, cosh $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $\quad \operatorname{arsinh} x := \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $\quad \operatorname{arcosh} x := \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cosh x + \sinh x = e^x$	$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$
$\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}$	$\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$
$\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$	

1.0.2 sin, cos $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$	$\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x) + x\sin(x)$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) - x\cos(x)$
$\sin 2x = 2\sin x\cos x$	$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \sin(x)\cos(x)\right)$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \sin(x)\cos(x)\right)$
$\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$	$\int \cos(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$

$\sin x = \frac{1}{2\mathrm{j}}(e^{\mathrm{j}x} - e^{-\mathrm{j}x})$

$\cos x = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{j}x} + e^{-\mathrm{j}x})$

log $\quad \log(1) = 0$

$a^x = e^{x\ln a}$ $\quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\quad \ln x \le x - 1$

1.1. Wichtige Integrale:

- Partielle Integration: $\int uv' = uv - \int u'v$
- Substitution: $\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}t} = \int f(t)\,\mathrm{d}t$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{x^3}}{3}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x\ln(x) - x$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x\ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left\lvert 1+x^2\right\rvert$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$e^{(x)}(x-1)$	$x\cdot e^{(x)}$	$e^x(x+1)$
$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}x + \sinh^{-1}(x)\right)$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\int e^{at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t = e^{at}\frac{a\sin(bt)+b\cos(bt)}{a^2+b^2}$

$\int t\sin(bt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b^2}(\sin(bt) - bt\cos(bt))$ $\quad \int te^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{at-1}{a^2}e^{at}$

1.2. Determinante von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $\det(A) = |A|$

$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D\end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(D)$

Hat $\underset{\sim}{A}$ 2 linear abhäng. Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$

Entwicklung. n. $i$ter Zeile: $|A| = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot|A_{ij}|$

1.2.1 Eigenwerte λ und Eigenvektoren $\underline{v}$

$\boxed{\underset{\sim}{A}\underline{v} = \lambda\underline{v}}$ $\quad \det\underset{\sim}{A} = \prod\lambda_i$ $\quad \operatorname{Sp}\underset{\sim}{A} = \sum\lambda_i$

Eigenwerte: $\det(\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{1}) = 0$, Det-Entwickl., Polynom-Div.
Eigenvektoren: $\operatorname{Eig}_{\underset{\sim}{A}}(\lambda_i) = \ker(\underset{\sim}{A} - \lambda_i\underset{\sim}{1}) = \underline{v}_i$
$\rightarrow \dim(\operatorname{Eig}_{\underset{\sim}{A}}(\lambda_i)) = \operatorname{geo}(\lambda_i) \quad \forall i: 1 \le \operatorname{geo}(\lambda_i) \le \operatorname{alg}(\lambda_i)$
Hauptvektoren Ein Vektor $\underline{v}$ heist Hauptvektor k-ter Stufe genau dann wenn: $(\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{E})^k\underline{v} = \underline{0}$ und $(\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{E})^{k-1}\underline{v} \ne 0$

1.3. Reihen

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \to \infty$ — Harmonische Reihe

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n \overset{|q|<1}{=} \frac{1}{1-q}$ — Geometrische Reihe

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = e^z$ — Exponentialreihe

2. Integralgarten

2.0.1 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern um x-Achse

$V = \pi\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x$ $\quad O = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x$

2.1. Skalares Kurvenintegral

$\boxed{\int\limits_{\gamma} f\,\mathrm{d}s := \int\limits_a^b f(\underline{\gamma}(t))\cdot\|\underline{\dot{\gamma}}(t)\|\mathrm{d}t}$

SF $f(\underline{x})$; $\underline{x}, \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^n$

$L(\underline{\gamma}) = \int_\gamma 1\,\mathrm{d}s$

Gesamtmasse $M = \int\limits_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int\limits_a^b \varrho(\underline{\gamma}(t))\cdot\|\underline{\dot{\gamma}}(t)\|\mathrm{d}t$

Schwerpunkt $\underline{S}$: $\quad S_i = \frac{1}{M(\underline{\gamma})}\cdot\int\limits_\gamma x_i\varrho\,\mathrm{d}s$

2.2. vektorielles Kurvenintegral

$\boxed{\int\limits_{\gamma}\underline{v}\cdot\mathrm{d}\underline{s} := \int\limits_a^b \underline{v}(\underline{\gamma}(t))^\top\cdot\underline{\dot{\gamma}}(t)\,\mathrm{d}t}$

VF $\underline{v}(\underline{x})$; $\underline{x}, \underline{v}, \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^n$

2.3. Gebietsintegral über Normalbereich V

Normalbereich V: Für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ gilt:
$a \le x \le b, u(x) \le y \le o(x), u'(x,y) \le z < o'(x,y)$

$\boxed{\iiint_V f\,\mathrm{d}V = \int\limits_a^b\int\limits_{u(x)}^{o(x)}\int\limits_{u'(x,y)}^{o'(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}$

2.4. Skalares Oberflächenintegral

Fläche $\underline{\phi}: B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (u, w) \mapsto \underline{\phi}(u, w)$ und SF f

$\boxed{\iint_{\underline{\phi}} f\,\mathrm{d}O := \iint_B f(\underline{\phi}(u,w))\cdot\|\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_w\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w}$

2.5. Vektorielles Oberflächenintegral (Bach)

VF $\underline{v}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \underline{x} \mapsto \underline{v}(x,y,z)$ und Fläche $\underline{\phi}(u, w)$

$\boxed{\iint_{\underline{\phi}}\underline{v}\cdot\,\mathrm{d}\underline{O} := \iint_B \underline{v}\left(\underline{\phi}(u,w)\right)^\top\cdot\left(\underline{\phi}_u \times \underline{\phi}_w\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w}$

3. Integralsätze

Ist $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet mit geschlossenem Rand $\partial B = \sum\underline{\gamma}_i$ mit $\underline{\gamma}_i \in \mathcal{C}^1$ und pos. param. (gegen Uhrzeigersinn), dann gilt $\forall\mathcal{C}^1$ VF $\underline{v}$:

3.1. Divergenzsatz von Grauß für einfache $\partial V = \sum\phi_i$

$\boxed{\iiint_V \operatorname{div}\underline{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_{\partial V}\underline{v}\cdot\,\mathrm{d}\underline{O} = \sum\iint_{\underline{\phi}_i}\underline{v}\cdot\,\mathrm{d}\underline{O}}$

$\underline{\phi}_i$ muss pos. param. sein! ($\underline{n} = \phi_{iu} \times \phi_{iy}$ nach außen)

Für Fläche A: $\boxed{\iint_A \operatorname{div}\underline{v}\,\mathrm{d}A = \oint_{\partial A}\underline{v}\left(\underline{\gamma}(t)\right)^\top\underline{n}\,\mathrm{d}s}$

$\mathrm{d}s = \|\underline{\dot{\gamma}}(t)\|\,\mathrm{d}t$ $\quad \underline{n} = \|\underline{\dot{\gamma}}\|^{-1}(\gamma_2, -\gamma_1)^\top$

3.2. Satz von Stokes für doppelpunktfreien $\partial\phi = \sum\gamma_i$

$\boxed{\iint_{\underline{\phi}}\operatorname{rot}\underline{v}\,\mathrm{d}\underline{O} = \oint_{\partial\underline{\phi}}\underline{v}\,\mathrm{d}\underline{s}}$

Rechte Hand Regel:
Flächennormale = Daumen
Umlaufrichtung = Finger

3.2.1 Satz von Green

$\boxed{\iint_B \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{\partial B}\underline{v}\cdot\,\mathrm{d}\underline{s} = \sum_{i=1}^{k}\int_{\underline{\gamma}_i}\underline{v}\cdot\,\mathrm{d}s}$

Fläche von B: $F(B) = \frac{1}{2}\oint_{\partial B}\begin{pmatrix}0\\ \gamma_1\end{pmatrix}\|\underline{\dot{\gamma}}(t)\|\,\mathrm{d}t$ $\quad \partial B = \sum\underline{\gamma}_i$

Sind f, g zwei SF, so: $\iiint_B f\Delta g + \nabla f\nabla g\,\mathrm{d}V = \iint_{\partial B} f\nabla g\,\mathrm{d}\underline{O}$
für $f = 1$: $\iiint_B \Delta g\,\mathrm{d}V = \iint_{\partial B}\nabla g\,\mathrm{d}\underline{O}$

3.3. Parametrisierungen

Kreis mit Radius r:

$\phi = x^2 + y^2 \le r^2$ $\quad \partial\phi = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t)\end{pmatrix}$ $\quad \underline{n} = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t)\end{pmatrix}$

Ellipse mit den Halbachsen a und b:

$\phi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ $\quad \partial\phi = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t)\end{pmatrix}$ $\quad \underline{n} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t)\end{pmatrix}$

Umrechnung Karth. in Polar falls orthogonal:
$\int\limits_x\int\limits_y f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \to \int\limits_\phi\int\limits_r f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$
Sonst: $\int\limits_x\int\limits_y f(\underline{x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \to \int\limits_\varphi\int\limits_r f(\underline{x}(r,\varphi))\det\underset{\sim}{J}_{\underline{x}}(r,\varphi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$

Gradientenfeld ϕ: $\quad$ Falls $\operatorname{rot}\underline{v} = 0 \Rightarrow \operatorname{grad}\phi = \underline{v}$
mit $\phi = \sum\partial x_i\underline{v}$ $\quad \int_a^b \underline{v}(\underline{\gamma}(t))\underline{\dot{\gamma}}\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$
$\operatorname{grad} f = \nabla f$ $\quad \operatorname{div}\underline{f} = \nabla^\top\cdot\underline{f}$ $\quad \operatorname{rot}\underline{f} = \nabla\times\underline{f}$

4. Fourierreihe

ist die Entwicklung einer Funktion $f \in C(T)$ in eine Reihe aus sin und cos.
$C(T)$: T-periodisch, stetig fortsetzbar
f ist T-periodisch, falls $f(x + T) = f(x) \to$ auch $n\cdot T$ periodisch.

4.1. Entwicklung in Fourierreihen $f(x) \sim F(x)$

- Bestimme die Fourierkoeffizienten zu $f \in C(T)$:

$a_k, b_k \in \mathbb{R}$: $\quad \boxed{\begin{Bmatrix} a_k \\ b_k\end{Bmatrix} = \frac{2}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\begin{Bmatrix}\cos \\ \sin\end{Bmatrix}\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)\,\mathrm{d}x}$

$c_k \in \mathbb{C}$: $\quad \boxed{c_k = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\exp\left(-\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}x\right)\,\mathrm{d}x}$

- Aufstellen der Fourierreihe F zu f:

$\boxed{F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right) + b_k\sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)}$

$\boxed{F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\exp\left(\mathrm{j}k\frac{2\pi}{T}x\right)}$

Konvergenz: $F(x) \sim f(x) \;\Rightarrow\; f$ in x stetig $\Rightarrow F(x) = f(x)$
f nicht in x stetig $\Rightarrow x = a_i$ und $F(x) = \frac{f(a_i^+) + f(a_i^-)}{2}$

Rechenregeln:

- $f \in C(T)$ gerade (achsensym.) Funktion: $c_k = c_{-k}$
  $b_k = 0$ und $a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)\,\mathrm{d}x$
- $f \in C(T)$ ungerade (punktsym.) Funktion: $c_k = -c_{-k}$
  $a_k = 0$ und $b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}x\right)\,\mathrm{d}x$

Umrechnungsformeln:

- $a_0 = 2c_0$ $\quad a_k = c_k + c_{-k}$ $\quad b_k = \mathrm{j}(c_k - c_{-k})$
- $c_0 = \frac{a_0}{2}$ $\quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{j}b_k)$ $\quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{j}b_k)$

4.2. Umrechnung von T in S periodische Funktionen

f ist T periodisch, $g(x) = f\left(\frac{T}{S}x\right)$, S periodisch, denn
$g(x + S) = f\left(\frac{T}{S}(x+S)\right) = f\left(\frac{T}{S}x + T\right) = f\left(\frac{T}{S}x\right) = g(x)$

5. Fouriertransformation $f(t) \to F(\omega)$

$f \to F$ mit Zeitfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und Frequenzfkt./Spektralfkt F
Es muss gelten: $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$ $\quad f$ fourtransbar, falls

$\boxed{F(\omega) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}t}$

Wichtige Fouriertransformationen:

$f(t)$		$F(\omega)$	$f(t)$		$F(\omega)$
1	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\pi\delta(\omega)$	$\lvert t^n\rvert$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2n!}{(\mathrm{j}\omega)^{n+1}}$
t^n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\pi\mathrm{j}^n\delta^{(n)}(\omega)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}\mathrm{u}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(a+\mathrm{j}\omega)^n}$
$\mathrm{u}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega)$	$\delta(t - t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-\mathrm{j}\omega t_0}$

5.1. Die Dirac'sche Deltafkt. $\delta(t)$

$\delta_\varepsilon(t - t_0) = \frac{1}{\varepsilon}$, für $t_0 \le t \le t_0 + \varepsilon$, sonst 0
Für stetiges g gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = g(t_0)$
$\Delta_{t_0}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t - t_0)\exp(-\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}t = \exp(-\mathrm{j}\omega t_0)$
$\delta(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet \Delta_{t_0}(\omega)$ und $\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet 1$

5.2. Heaviside-Funktion $\mathrm{u}(t)$

$\mathrm{u}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t < 0\end{cases}$ $\quad \approx \lim\limits_{a\to 0}\exp(-at)$

5.3. Die Inverse Fouriertransformation

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(\mathrm{j}\omega t)\,\mathrm{d}\omega$

$\begin{cases} f(t) & , f \text{ stetig in } t \\ \frac{f(t^-)+f(t^+)}{2} & , \text{falls } f \text{ unstetig in } t\end{cases}$

5.4. Die diskrete Fouriertransformation
Falls f nur an N diskreten äquidistanten Stellen bekannt:
Sample: $(x_l, f(x_l))$ mit $x_l = l\frac{2\pi}{N}$ und $l = 0, ..., N-1$

$\boxed{c_k \approx \hat{c}_k = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f(x_l)\zeta^{kl}}$ mit $\zeta := \exp(-\frac{2\pi j}{N})$

- Bestimme die N-te Fouriermatrix $\underset{\sim}{F}_N = (\zeta^{kl})_{k,l=0...N-1}$
  Es gilt $F_N^\top = F_N$, da $\zeta^{kl} = \zeta^{lk}$
- Bestimme $\underline{\hat{c}} = \frac{1}{N}\underset{\sim}{F}_N \cdot \underline{v}$ mit $\underline{v} = (f(x_0), ..., f(x_{N-1}))$

5.5. Die inverse diskrete Fouriertransformation
Falls $\zeta^{m+n} = 1 \Leftrightarrow m+n = kN \quad \Rightarrow \quad \underset{\sim}{F}_N \cdot \overline{\underset{\sim}{F}_N} = N \cdot \underset{\sim}{1}_N$
$\underline{v} = \overline{\underset{\sim}{F}_N} \cdot \underline{\hat{c}} \qquad \underline{\hat{c}} = \frac{1}{N}\underset{\sim}{F}_N \cdot \underline{v}$

Trigonometrische Polynom: $P(x_l) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{c}_k e^{jkx_l} = v_l$

5.6. trigonometrische Interpolation
Finde ein trigonometrisches Polynom $P(x)$, dass durch die Samples geht.
Fall 1: $N = 2n+1 \quad \Rightarrow \quad P(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{c}_k \exp(jkx)$

c_k	a_k	b_k
$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} v_l \zeta^{kl}$	$\frac{2}{N}\sum_{l=0}^{N-1} v_l \cos\frac{2\pi kl}{N}$	$\frac{2}{N}\sum_{l=0}^{N-1} v_l \sin\frac{2\pi kl}{N}$

Fall 2: $N = 2n \qquad P(x) = \sum_{k=-n}^{n-1} \hat{c}_k \exp(jkx)$

Falls Stützwerte reel: $c_{-k} = \overline{c_k}$ und somit:
$a_0 = 2c_0 \qquad a_k = \hat{c}_k + \hat{c}_{N-k} = 2\Re(\hat{c}_k) \qquad b_k = j(\hat{c}_k - \hat{c}_{N-k})$
Berechne nur für $k \leq \frac{N}{2}$

5.7. Regeln
Linearität: $\alpha f(t) + \beta g(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$

$\overline{f(t)} \quad \circ\!-\!\bullet \quad \overline{F(-\omega)}$	$f(ct) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{1}{\lvert c\rvert}F(\frac{\omega}{c})$
$f(t-a) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \exp(-j\omega a)F(\omega)$	$\exp(j\tilde{\omega}t)f(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad F(\omega - \tilde{\omega})$
$f'(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad j\omega F(\omega)$	$tf(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad jF'(\omega)$

Faltung: $(f * g)(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad F(\omega)\cdot G(\omega)$

6. Laplacetransformation $\quad \mathcal{L}(f(t)) = F(s)$

$f(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad F(s) := \int_0^\infty f(t)\exp(-st)\,dt$

$1 \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{1}{s}$	$\delta(t-t_0) \quad \circ\!-\!\bullet \quad e^{-st_0}$
$t^n \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{at} \quad \overset{s>a}{\circ\!-\!\bullet} \quad \frac{1}{s-a}$
$\sin(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{1}{s^2+1}$	$\cos(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{s}{s^2+1}$
$\sin(\omega t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin(\omega t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	
$e^{-at}\cos(\omega t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	

Linearität: $\alpha f(t) + \beta g(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \alpha F(s) + \beta G(s)$
Ähnlichkeit: $f(ct) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$
Ableitung Originalfkt: $f'(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad sF(s) - f(0)$
$f''(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)} \quad \circ\!-\!\bullet \quad s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0)\ldots - f^{(n-1)}(0)$
Integral Originalfkt: $\int_0^t f(x)\,dx \quad \circ\!-\!\bullet \quad \frac{1}{s}F(s)$
Ableitung Bildfkt: $(-t)^n f(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad F^{(n)}(s)$
Verschiebung: $f(t-a)u(t-a) \quad \circ\!-\!\bullet \quad e^{-as}F(s)$
Dämpfung: $e^{-at}f(t) \quad \circ\!-\!\bullet \quad F(s+a)$

Faltung: $(f * g)(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \quad \circ\!-\!\bullet \quad F(s)\cdot G(s)$
Inverse: $f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma - j\infty}^{-\gamma + j\infty} F(s)\exp(st)\,ds$
Es gibt eine eineindeutige Korespondens zwischen den Originalfkt und Bildfkt. Meist Nennergrad > Zählergrad: Bruch geschickt umformen! Laplacetransformierte als Summe nie auf gemeinsamen Nenner bringen!!

7. Differentialgleichungen DGL
Anfangswertproblem AWP = DGL + Anfangsbedingung:
$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = s(t) \quad f(0) = d, f'(0) = e$
$\rightarrow$ falls DGL höherer Ordnung $\rightarrow$ Vogel-Strauß-Algorithmus

7.1. DGL LaPlace-Transformierbar
Falls gilt $f(t) \circ\!-\!\bullet F(s)$ und $s(t) \circ\!-\!\bullet S(s)$:
Laplacetrafo: $a(s^2F(s) - sf(0) - f'(0)) + b(sF(s) - f(0)) + cF(s) = S(s)$
$F(s) = \frac{a(sd+e)+bd}{as^2+bs+c} + S(s)\frac{1}{as^2+bs+c}$
Rücktransformation von $F(s)$ liefert die Lösung $f(t)$

7.2. DGL-Systeme + Anfangsbedingung
$\underline{\dot{f}} = \underset{\sim}{A}\underline{f} + \underline{s}(t)$
1. Ordnung + 2 Gleichungen und $x(0) = x_0; y(0) = y_0$
$\dot{x}(t) = ax(t) + by(t) + s_1(t)$
$\dot{y}(t) = cx(t) + dy(t) + s_2(t)$
Falls alle Funktionen LaPlace transformierbar
$\begin{bmatrix} s-a & -b \\ -c & s-d \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(s) \\ S_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$

7.3. Integralgleichungen vom Volterra-Typ
$a \cdot f(t) + \int_0^t k(t-x)f(x)\,dx = s(t)$
Falls alle Fkt. Ltrafobar: $aF(s) + K(s)\cdot F(s) = S(s)$

7.4. seperierbare DGL
Form: $y' = f(x)\cdot g(y)$; Lösung: $\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$

7.5. lineare DGL mit konstanten Koeffizienten
7.5.1 homogene DGL mit konstanten Koeffizienten
$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_0y = 0$

- Stelle die charakteristische Gleichung $p(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k\lambda^k = 0$ auf
- Bestimme alle Lösungen von $p(\lambda)$
- Gib n linear unabhängige Lösungen der DGL an:
  - Ist λ eine m-fache reelle NST, dann wähle $y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_i = x^ie^{\lambda x}$
  - Ist λ eine m-fache konjugiert komplexe NST $\lambda = a + jb$, dann streiche $\overline{\lambda}_i$ und wähle $y_1 = e^{ax}\cos(bx)$, $y_2 = e^{ax}\sin(bx)$ bzw. $y_i = x^ie^{ax}\sin(bx)$ und $y_{i+1} = x^ie^{ax}\cos(bx)$
- $y(x) = c_1y_1(x) + \ldots + c_ny_n(x)$ mit $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ ist Lösung der DGL

7.5.2 inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten
$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_0y = s(t)$

- Löse homogene DGL ($s = 0$), liefert y_h
- Partikuläre Lösung y_p durch **Variation der Konstanten**
  - Stelle ein $y_p(x)$ mit variablen Konstanten $c(x)$ auf
  - Löse das System:
    $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$
    $c_1'y_1' + c_2'y_2' = \frac{1}{a_n}s(x)$
    Beachte dabei auch die Ableitung nach der Produktregel
  - Erhalte $c(x)$ durch unbestimmte Integration aus $c'(x)$
  - $y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ ist die partikuläre Lösung
- Partikuläre Lsg. y_p durch Ansatz vom komischen Typ auf der rechten Seite
  - Idee: y_p hat die Form von $s(x)$
    Falls $s(x) = (b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m)e^{ax}\begin{Bmatrix}\cos(bx) \\ \sin(bx)\end{Bmatrix}$, dann
    $y_p = x^r \cdot [(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)\cos(bx) + (B_0 + B_1x + \ldots + B_mx^m)\sin(bx)]e^{ax}$
    mit $a + bj$ ist r-fache Nullstelle(Resonanz) vom char. Poly. von y_h
    Tipp: Bei Summen im Störglied entkoppelt, d.h. y_p getrennt berechnen und addieren.
- Die Lösung der DGL ist $y = y_p + y_h$

7.6. Die exakte DGL
DGL der Form: $\boxed{f(x,y) + g(x,y)\cdot y' = 0}$
bzw. $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = 0$

Bedingung für Exaktheit: $\partial_y f = \partial_x g$
Gradientenfeld $v(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$ hat Stammfkt. $F(x, y(x)) = C$

- Bestimme die Stammfunktion $F(x,y)$ von v durch sukzessive Integration:
  - $(*)\ F(x,y) = \int f dx + G(y)$
  - Bestimme $G'(y)$ aus $F_y = \frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = g$
  - Bestimme $G(y)$ aus $G'(y)$ durch Integration
  - Erhalte $F(x,y)$ aus Schritt $(*)$
- Löse $F(x,y) = c$ nach $y = y(x)$ auf, falls möglich
- Die von c abhängige Lsg. ist die allg. Lsg. der DGL

7.7. Integrierende Faktoren – der Eulen-Multiplikator
Multipliziere nicht exakte DGL mit integrierenden Faktor $\mu(x,y)$ und erhalte eine exakte DGL mit gleichen Lösungen.
$\partial_y(\mu f) = \partial_x(\mu g) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_y f + \mu f_y = \mu_x g + \mu g_x}$
Ist $\frac{\partial_y f - \partial_x g}{g} = u(x)$ so ist $\mu = \exp(\int u(x)\,dx)$
Ist $\frac{\partial_x g - \partial_y f}{f} = u(y)$ so ist $\mu = \exp(\int u(y)\,dy)$

7.8. Die euler-homogene DGL
Form $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow$ Substitution: $z = \frac{y}{x}$
$\boxed{y' = z + xz' = \phi(z)}$ Löse $z' = (\phi(z) - z)\cdot\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = xz$

7.9. eulersche DGL
DGL in der Form $\sum_{i=0}^n a_ix^i\cdot y^{(i)}(x) = s(x)$
Lösungsmenge $\underset{\text{alg. Lös.}}{L_a} = \underset{\text{part. Lös.}}{y_p} + \underset{\text{hom. Lös.}}{L_n}$ durch V.d.K.
Löse char. Pol.: $a_n\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1)) + \ldots + a_1\alpha_1 + a_0 = 0$

Wähle Basisvektoren des Lösungsraumes:

- m-fache Nullstelle $\in \mathbb{R}$:
  $x^\alpha, \ldots, x^\alpha(\ln x)^{m-1}$
- m-fache Nullstelle $\in \mathbb{C}$ (streiche $\overline{\alpha_i}$):
  $x^a\sin(b\ln x), \ldots, x^a\sin(b\ln x)(\ln x)^{m-1}$
  $x^a\cos(b\ln x), \ldots, x^a\sin(b\ln x)(\ln x)^{m-1}$

Lösung: (z.B. für 2 Nullstellen $\in \mathbb{R}$): $y(x) = C_1x^\alpha + C_2x^\alpha\ln(x)$

7.10. Potenzreihenansatz
Geg. DGL $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = s(x)$
Falls $a_i(x) \approx \sum_{k=0}^\infty c_k^{(a_i)}\cdot(x-a)^k$ und $s(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k^{(s)}\cdot(x-a)^k$

Dann $\exists y(x) = \sum_0^\infty c_k\cdot(x-a)^k$ eine Lsg der DGL.
Die c_k bestimmt man durch einsetzen von $y(x)$ + Koeff. Vergleich.

7.11. Homogene lineare DGL Systeme
$\rightarrow$ Jede DGL lässt sich als DGL System darstellen
Transformiere eine DGL 2. Ordnung in ein DGL System 1. Ordnung:

- Substituiere $\dot{x} = y$
- Schreibe DGL-System:
  $\begin{pmatrix}\dot{x} \\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (Bestimme a_1 und a_2 aus DGL)

Löse das DGL-System (Das System ist ohnehin an allem Schuld ;))

1. Bestimme EW λ_i und Basis aus EV $\underline{b}_i$ von $\underset{\sim}{A}$
2. Setze $\underset{\sim}{S} = (\underline{b}1, ..., \underline{b}_n)$ und bestimme $\underset{\sim}{S}^{-1}$ und $\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{S}^{-1}\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{S}$
3. Berechne $e^{\underset{\sim}{A}} = \exp(\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{S}^{-1}) = \underset{\sim}{S}e^{\underset{\sim}{D}}\underset{\sim}{S}^{-1}$

$\underline{y}' = \underset{\sim}{A}\underline{y} \quad \Rightarrow \quad \underline{y} = \underline{c}\cdot e^{(x-x_0)\underset{\sim}{A}} = \sum_{i=0}^n c_i\cdot e^{\lambda_i x}\cdot b_i$

Bei komplexen EW: Trennung in Real und Imaginärteil

7.12. Lösung für $y' = Ay$ falls A nicht diagbar
$\rightarrow$ Es existiert eine Jordan-Normalform $\underset{\sim}{J}$ mit $\underset{\sim}{S}^{-1}\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{S}$

$e^{\underset{\sim}{J}} = e^{\underset{\sim}{D}+\underset{\sim}{N}} = e^De^N = e^D\cdot(\underset{\sim}{E}_k + \underset{\sim}{N} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{N}^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\underset{\sim}{N}^k)$

$e^{x\underset{\sim}{N}} = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{1}{2}x^2 & \ldots & \frac{1}{(k-1)!}x^{k-1} \\ & 1 & x & & \\ 0 & & 1 & & \end{bmatrix}$

$\underset{\sim}{S}$ ist die Transformationsmatr. auf Jordan-Normalform:
$\underset{\sim}{S} = (\underline{b}_1, ..., \underline{b}_n)$ mit $\underline{b}_1 \ldots \underline{b}_n$ sind EV bzw. HV von $\underset{\sim}{A}$

Allgemeine Lösung:
$\boxed{\underline{y}(x) = e^{x\underset{\sim}{A}}\cdot\underline{c} = \underset{\sim}{S}e^{x\underset{\sim}{J}}\underset{\sim}{S}^{-1} = \underset{\sim}{S}e^{x(\underset{\sim}{D}+\underset{\sim}{N})}\underline{c}}$

Die Lösungsformel für (1×1), (2×2) **und** (3×3) **Kästchen**
$y_a(x) = c_1e^{\lambda_1x}v_1$
$+c_2e^{\lambda_2x}v_2 + c_3e^{\lambda_2x}(xv_2 + v_3)$
$+c_4e^{\lambda_3x}v_4 + c_5e^{\lambda_3x}(xv_4 + v_5) + c_6e^{\lambda_3x}(\frac{1}{2}x^2v_4 + xv_5 + v_6)$

$\rightarrow v_1, v_2, v_4$ EV, v_3, v_5 HV 2. Stufe und v_6 HV 3. Stufe

7.13. Lösen von allgemeinen DGL-Systemen
DGL-System: $\underline{\dot{y}}(t) = \underset{\sim}{A}(t)\cdot\underline{y}(t) + \underline{b}(t)$

1. Finde n lin. unabhäng. Lösungsvektoren $\underline{y}_1, ..., \underline{y}_n$ mit der Wronski Determinante $W(t) = \det(\underline{y}_1, ..., \underline{y}_n) \overset{!}{\neq} 0$
2. Bestimme $\underline{y}_p = \underset{\sim}{Y}(t)\underline{c}(t)$ durch Variation der Konstanten
   $c(t) = \int \underset{\sim}{Y}^{-1}(t)\underline{b}(t)\,dt$ bzw. $\underset{\sim}{Y}\cdot\underline{c}'(t) = \underline{b}$
3. Bestimme $\underline{y} = \underline{y}_p + \sum c_i\underline{y}_i$ mit $c_i \in \mathbb{R}$

Gleichgewichtspunkt: $Ay_g + b = 0 \rightarrow (A|b) \rightarrow (E|y_g)$
Stabilität:

- $Re(\lambda_i) < 0 \rightarrow$ asymptotisch stabil
- $Re(\lambda_i) > 0 \rightarrow$ instabil
- $Re(\lambda_i) \leq 0 \rightarrow$ stabil

Auch wichtig: Schrödingers Katze