Höhere Mathematik 3

1. Nützliches Wissen $e^{jx} = \cos(x) + j \cdot \sin(x)$

1.0.1 sinh, cosh $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $\quad \text{arsinh}\ x := \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ $\quad \text{arcosh}\ x := \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cosh x + \sinh x = e^x$	$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$
$\sinh(\text{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}$	$\int \cosh x\, dx = \sinh x + C$
$\cosh(\text{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$	

1.0.2 sin, cos $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$	$\int x\cos(x)\, dx = \cos(x) + x\sin(x)$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\int x\sin(x)\, dx = \sin(x) - x\cos(x)$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\int \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\int \cos^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x))$
$\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$	$\int \cos(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$

$\sin x = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$ $\quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$

$a^x = e^{x \ln a}$ $\quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\quad \log(1) = 0$

1.1. Wichtige Integrale:

- Partielle Integration: $\int uv' = uv - \int u'v$
- Substitution: $\int f(\underbrace{g(x)}_{t})\underbrace{g'(x)\,dx}_{dt} = \int f(t)\,dt$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{x^3}}{3}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x\ln(x) - x$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left\lvert 1+x^2\right\rvert$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$e^{(x)}(x-1)$	$x \cdot e^{(x)}$	$e^x(x+1)$
$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+1}x + \sinh^{-1}(x)\right)$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\int e^{at}\sin(bt)\,dt = e^{at}\frac{a\sin(bt)+b\cos(bt)}{a^2+b^2}$

$\int t\sin(bt)\,dt = \frac{1}{b^2}(\sin(bt) - bt\cos(bt))$

$\int t\cos(bt)\,dt = \frac{1}{b^2}(bt\sin(bt) + \cos(bt))$

$\int te^{at}\,dt = \frac{at-1}{a^2}e^{at}$ $\quad \int t^2e^{at}\,dt = \frac{(ax-1)^2+1}{a^3}e^{at}$

1.2. Determinante von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $\det(A) = |A|$

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D\end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(D)$$

Hat $\underline{\underline{A}}$ 2 linear abhäng. Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$

Entwicklung. n. $i$ter Zeile: $|A| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot|A_{ij}|$

1.2.1 Eigenwerte λ und Eigenvektoren $\underline{\boldsymbol{v}}$

$\boxed{\underline{\underline{A}}\underline{\boldsymbol{v}} = \lambda\underline{\boldsymbol{v}}}$ $\quad \det\underline{\underline{A}} = \prod\lambda_i$ $\quad \text{Sp}\,\underline{\underline{A}} = \sum\lambda_i$

Eigenwerte: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{1}}) = 0$, Det-Entwickl., Polynom-Div.
Eigenvektoren: $\text{Eig}_{\underline{\underline{A}}}(\lambda_i) = \ker(\underline{\underline{A}} - \lambda_i\underline{\underline{1}}) = \underline{\boldsymbol{v}}_i$
$\rightarrow \dim(\text{Eig}_{\underline{\underline{A}}}(\lambda_i)) = \text{geo}(\lambda_i) \quad \forall i : 1 \le \text{geo}(\lambda_i) \le \text{alg}(\lambda_i)$
Hauptvektoren Ein Vektor $\underline{\boldsymbol{v}}$ heißt Hauptvektor k-ter Stufe genau dann wenn: $(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}})^k\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{0}}$ und $(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}})^{k-1}\underline{\boldsymbol{v}} \neq 0$

1.3. Reihen

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \rightarrow \infty$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n \overset{\lvert q\rvert<1}{=} \frac{1}{1-q}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = e^z$
Harmonische Reihe	Geometrische Reihe	Exponentialreihe

1.4. Vektoroperatoren

$\text{grad}\, f = \nabla f$ $\quad \text{div}\, \underline{\boldsymbol{f}} = \nabla^\top\cdot\underline{\boldsymbol{f}}$ $\quad \text{rot}\, \underline{\boldsymbol{f}} = \nabla\times\underline{\boldsymbol{f}}$

$\Delta f = \text{div grad}\, f$

2. Integralarten

2.0.1 Regulärer Bereich

$B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **regulärer Bereich**, wenn

- B abgeschlossen und einfach zusammenhängend
- B lässt sich in endlich viele Normalbereiche zerlegen

2.0.2 Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern um x-Achse

$V = \pi\int_a^b f(x)^2 dx$ $\quad O = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx$

2.1. Skalares Kurvenintegral

$$\boxed{\int_\gamma f\,ds := \int_a^b f(\underline{\boldsymbol{\gamma}}(t))\cdot\|\dot{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}(t)\|dt}$$

SF $f(\underline{\boldsymbol{x}})$; $\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{\gamma}} \in \mathbb{R}^n$
$L(\underline{\boldsymbol{\gamma}}) = \int_\gamma 1\,ds$

Gesamtmasse $M = \int_\gamma f\,ds = \int_a^b \varrho(\underline{\boldsymbol{\gamma}}(t))\cdot\|\dot{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}(t)\|dt$

Schwerpunkt $\underline{\boldsymbol{S}}$: $\quad S_i = \frac{1}{M(\underline{\boldsymbol{\gamma}})}\cdot\int_\gamma x_i\varrho\,ds$

2.2. vektorielles Kurvenintegral

$$\boxed{\int_\gamma \underline{\boldsymbol{v}}\cdot d\underline{\boldsymbol{s}} := \int_a^b \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}(t))^\top\cdot\dot{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}(t)\,dt}$$

VF $\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}})$; $\underline{\boldsymbol{x}}, \underline{\boldsymbol{v}}, \underline{\boldsymbol{\gamma}} \in \mathbb{R}^n$

2.2.1 Fluss durch Kurve

Fluss von $\underline{\boldsymbol{v}}$ von (in Durchlaufrichtung gesehen) links nach rechts.

$$\boxed{\int_\omega \underline{\boldsymbol{v}}\,d\underline{\boldsymbol{n}} = \int_\omega \underline{\boldsymbol{v}}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\underline{\boldsymbol{T}}(\underline{\boldsymbol{x}})\,d\underline{\boldsymbol{s}}}$$

2.3. Gebietsintegrale über Normalbereiche

$f : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

2.3.1 Flächenintegrale im $\mathbb{R}^2$

Typ I B_{I} regulärer Bereich
$B_{\text{I}} = \left\{\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^2 | a \le x_1 \le b; g(x_1) \le x_2 \le h(x_1)\right\}$

$$\boxed{\iint_B f\,dF = \int_{x_1=a}^{b}\int_{x_2=g(x_1)}^{h(x_1)} f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1}$$

Typ II B_{II} regulärer Bereich
$B_{\text{II}} = \left\{\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^2 | c \le x_2 \le d; l(x_2) \le x_1 \le r(x_2)\right\}$

$$\boxed{\iint_B f\,dF = \int_{x_2=c}^{d}\int_{x_1=l(x_2)}^{r(x_2)} f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2}$$

2.3.2 Volumenintegrale im $\mathbb{R}^3$

V regulärer Bereich
$V = \{\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^3 | a \le x_1 \le b, u(x_1) \le x_2 \le o(x_1), u'(x_1,x_2) \le x_3 < o'(x_1,x_2)\}$

$$\boxed{\iiint_V f\,dV = \int_a^b\int_{u(x_1)}^{o(x_1)}\int_{u'(x_1,x_2)}^{o'(x_1,x_2)} f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\,dx_2\,dx_1}$$

2.4. Koordinatentransformationen

$D, B \subseteq \mathbb{R}^2$ reguläre Bereiche
$\underline{\boldsymbol{x}} : D \rightarrow B$ mit $\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{x}}(u_1, u_2)$ $\quad \underline{\boldsymbol{u}} \in D$
$\Rightarrow \iint_B f(x_1,x_2)\,dF(\underline{\boldsymbol{x}}) = \iint_D f(\underline{\boldsymbol{x}}(u_1,u_2))\left|\det J_{\underline{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{u}})\right|\,dF(\underline{\boldsymbol{u}})$
$J_{\underline{\boldsymbol{x}}} \neq 0$ bis auf Nullmengen

$D, B \subseteq \mathbb{R}^3$ reguläre Bereiche
$\underline{\boldsymbol{x}} : D \rightarrow B$ mit $\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{x}}(u_1, u_2, u_3)$ $\quad \underline{\boldsymbol{u}} \in D$
$\Rightarrow \iiint_B f(\underline{\boldsymbol{x}})\,dV(\underline{\boldsymbol{x}}) = \iiint_D f(\underline{\boldsymbol{x}}(\underline{\boldsymbol{u}}))\left|\det J_{\underline{\boldsymbol{x}}}(\underline{\boldsymbol{u}})\right|\,dV(\underline{\boldsymbol{u}})$
$J_{\underline{\boldsymbol{x}}} \neq 0$ bis auf Nullmengen

2.4.1 Koordinatenwechsel

$\underline{\boldsymbol{x}} : \underline{\boldsymbol{u}} \in D \rightarrow \underline{\boldsymbol{x}}(\underline{\boldsymbol{u}}) \in B$ orthogonale Transformation
$D, B \subseteq \mathbb{R}^3$

$B(\underline{\boldsymbol{u}}) = \left(\underline{\boldsymbol{e}}_{u_1} \quad \underline{\boldsymbol{e}}_{u_2} \quad \underline{\boldsymbol{e}}_{u_3}\right)$ $\quad \underline{\boldsymbol{e}}_{u_i} = \frac{\underline{\boldsymbol{x}}_{u_i}}{\|\underline{\boldsymbol{x}}_{u_i}\|}$

$\boxed{\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}}(\underline{\boldsymbol{u}})) = B(\underline{\boldsymbol{u}})\underline{\boldsymbol{V}}(\underline{\boldsymbol{u}})}$

Kurvenintegrale
$\omega(t) \in D$: Kurve im $\underline{\boldsymbol{u}}$-Raum
$\underline{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}(t) = \underline{\boldsymbol{x}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}(t))$: Zugehörige Kurve im x-Raum

$$\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}})\cdot\,d\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{V}}(\underline{\boldsymbol{u}})\cdot\begin{pmatrix}h_1\,du_1\\ h_2\,du_2\\ h_3\,du_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}h_1V_1(\underline{\boldsymbol{u}})\\ h_2V_2(\underline{\boldsymbol{u}})\\ h_3V_3(\underline{\boldsymbol{u}})\end{pmatrix}\cdot\,d\underline{\boldsymbol{u}}$$

$d\underline{\boldsymbol{x}} = h_1\underline{\boldsymbol{e}}_{u_1}\,du_1 + h_2\underline{\boldsymbol{e}}_{u_2}\,du_2 + h_3\underline{\boldsymbol{e}}_{u_3}\,du_3$

$ds(\underline{\boldsymbol{x}}) = \sqrt{h_1^2\dot{\omega}_1(t)^2 + h_2^2\dot{\omega}_2(t)^2 + h_3^2\dot{\omega}_3(t)^2}\,dt$

Oberflächenintegrale
$T \subset D$: Fläche im u-Bereich
$S \subset B$: Entsprechende Fläche im x-Bereich
$S = \underline{\boldsymbol{x}}(T)$; Parametrisierung in D: $(u,w) \in M \mapsto \underline{\boldsymbol{\phi}}(u,w)$

$$\iint_S \underline{\boldsymbol{v}}\cdot\,d\underline{\boldsymbol{O}} = \iint_M\left(V_1h_2h_3\frac{\partial(\phi_2,\phi_3)}{\partial(u,w)} + V_2h_3h_1\frac{\partial(\phi_3,\phi_1)}{\partial(u,w)} + V_3h_1h_2\frac{\partial(\phi_1,\phi_2)}{\partial(u,w)}\right)\,ds\,dt$$

$$d\underline{\boldsymbol{O}}(\underline{\boldsymbol{x}}) = \left[h_2h_3\frac{\partial(\phi_2,\phi_3)}{\partial(u,w)}\underline{\boldsymbol{e}}_{u_1} + h_3h_1\frac{\partial(\phi_3,\phi_1)}{\partial(u,w)}\underline{\boldsymbol{e}}_{u_2} + h_1h_2\frac{\partial(\phi_1,\phi_2)}{\partial(u,w)}\underline{\boldsymbol{e}}_{u_3}\right]\,ds\,dt$$

2.5. Integration über Flächen in $\mathbb{R}^3$

2.5.1 Parametrisierung

Fläche im Zweidimensionalen wird zuerst parametrisiert:
$(u,w) \in M \mapsto \underline{\boldsymbol{\phi}}(u,w) = \underline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^3$

Kreis mit Radius r:
$\phi = x^2 + y^2 \le r^2$ $\quad \partial\phi = \begin{pmatrix}r\cos(t)\\ r\sin(t)\end{pmatrix}$ $\quad \underline{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix}r\cos(t)\\ r\sin(t)\end{pmatrix}$

Ellipse mit den Halbachsen a und b:
$\phi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ $\quad \partial\phi = \begin{pmatrix}a\cos(t)\\ b\sin(t)\end{pmatrix}$ $\quad \underline{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix}a\cos(t)\\ b\sin(t)\end{pmatrix}$

Eigenschaften der Parametrisierung $\underline{\boldsymbol{\phi}}(u,w)$

- x flächentreu: $\|\underline{\boldsymbol{\phi}}_u \times \underline{\boldsymbol{\phi}}_w\| = 1$
- x winkeltreu: $\underline{\boldsymbol{\phi}}_u \perp \underline{\boldsymbol{\phi}}_w$ & $\|\underline{\boldsymbol{\phi}}_u\| = \|\underline{\boldsymbol{\phi}}_w\|$
- x längentreu: $\underline{\boldsymbol{\phi}}_u \perp \underline{\boldsymbol{\phi}}_w$ & $\|\underline{\boldsymbol{\phi}}_u\| = \|\underline{\boldsymbol{\phi}}_w\| = 1$

2.5.2 Skalares Oberflächenintegral

Fläche $\underline{\boldsymbol{\phi}} : B \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u,w) \mapsto \underline{\boldsymbol{\phi}}(u,w)$ und SF f

$$\boxed{\iint_{\underline{\boldsymbol{\phi}}} f\,dO := \iint_B f(\underline{\boldsymbol{\phi}}(u,w))\cdot\|\underline{\boldsymbol{\phi}}_u \times \underline{\boldsymbol{\phi}}_w\|\,du\,dw}$$

2.5.3 Vektorielles Oberflächenintegral (Fluss)

VF $\underline{\boldsymbol{v}} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\underline{\boldsymbol{x}} \mapsto \underline{\boldsymbol{v}}(x,y,z)$ und Fläche $\underline{\boldsymbol{\phi}}(u,w)$

$$\boxed{\iint_{\underline{\boldsymbol{\phi}}} \underline{\boldsymbol{v}}\cdot\,d\underline{\boldsymbol{O}} := \iint_B \underline{\boldsymbol{v}}\left(\underline{\boldsymbol{\phi}}(u,w)\right)^\top\cdot\left(\underline{\boldsymbol{\phi}}_u \times \underline{\boldsymbol{\phi}}_w\right)\,du\,dw}$$

3. Integralsätze

Ist $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet mit geschlossenem Rand $\partial B = \sum\underline{\boldsymbol{\gamma}}_i$ mit $\underline{\boldsymbol{\gamma}}_i \in \mathcal{C}^1$ und pos. param. (gegen Uhrzeigersinn), dann gilt $\forall\mathcal{C}^1$ VF $\underline{\boldsymbol{v}}$:

3.1. Divergenzsatz von Gauß für einfache $\partial V = \sum\phi_i$

$$\boxed{\iiint_V \text{div}\,\underline{\boldsymbol{v}}\,dx\,dy\,dz = \oiint_{\partial V}\underline{\boldsymbol{v}}\cdot\,d\underline{\boldsymbol{O}} = \sum\iint_{\underline{\boldsymbol{\phi}}_i}\underline{\boldsymbol{v}}\cdot\,d\underline{\boldsymbol{O}}}$$

$\underline{\boldsymbol{\phi}}_i$ muss pos. param. sein! ($\underline{\boldsymbol{n}} = \phi_{iu}\times\phi_{iy}$ nach außen)

Für Fläche A: $\boxed{\iint_A \text{div}\,\underline{\boldsymbol{v}}\,dA = \oint_{\partial A}\underline{\boldsymbol{v}}\left(\underline{\boldsymbol{\gamma}}(t)\right)^\top\underline{\boldsymbol{n}}\,ds}$

$ds = \|\dot{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}(t)\|\,dt$ $\quad \underline{\boldsymbol{n}} = \|\dot{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}\|^{-1}(\gamma_2, -\gamma_1)^\top$

3.1.1 Sektorformel zur Flächenberechnung

$\omega(t) = \partial B$

$$\boxed{F(B) = \frac{1}{2}\int_a^b \omega_1\dot{\omega}_2 - \omega_2\dot{\omega}_1\,dt}$$

3.2. Satz von Stokes für doppelpunktfreien $\partial\phi = \sum\gamma_i$

$$\boxed{\iint_{\underline{\boldsymbol{\phi}}}\text{rot}\,\underline{\boldsymbol{v}}\,d\underline{\boldsymbol{O}} = \oint_{\partial\underline{\boldsymbol{\phi}}}\underline{\boldsymbol{v}}\,d\underline{\boldsymbol{s}}}$$

Rechte Hand Regel:
Flächennormale = Daumen
Umlaufrichtung = Finger

3.2.1 Satz von Green

$$\boxed{\iint_B \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\,dx\,dy = \oint_{\partial B}\underline{\boldsymbol{v}}\cdot\,d\underline{\boldsymbol{s}} = \sum_{i=1}^{k}\int_{\underline{\boldsymbol{\gamma}}_i}\underline{\boldsymbol{v}}\cdot\,ds}$$

3.2.2 Satz von Stokes für ebene Felder

$\underline{\boldsymbol{v}} : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\underline{\boldsymbol{e_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\iint_B \mathrm{rot} \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{v}} \\ 0 \end{pmatrix} \underline{\boldsymbol{e_3}} \;\mathrm{d}F = \oint_{\partial B} \underline{\boldsymbol{v}} \;\mathrm{d}\underline{\boldsymbol{x}}}$$

Sind f, g zwei SF, so: $\iiint_B f\Delta g + \nabla f \nabla g \;\mathrm{d}V = \iint_{\partial B} f \nabla g \;\mathrm{d}\underline{\boldsymbol{O}}$
für $f = 1$: $\iiint_B \Delta g \;\mathrm{d}V = \iint_{\partial B} \nabla g \;\mathrm{d}\underline{\boldsymbol{O}}$

3.3. Gradientenfeld

$D \subset \mathbb{R}^n$ offen und **einfach zusammenhängend** und $\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{x}})$ mit $\underline{\boldsymbol{v}} : D \to \mathbb{R}^n$ C^1-Vektorfeld. Wenn

- $\mathrm{rot}\, \underline{\boldsymbol{v}} = 0$ **oder**
- $J_{\underline{\boldsymbol{v}}}(\underline{\boldsymbol{x}}) = J^T_{\underline{\boldsymbol{v}}}(\underline{\boldsymbol{x}}) \quad \forall \underline{\boldsymbol{x}} \in D$

Dann

- $\underline{\boldsymbol{v}}$ ist Gradientenfeld mit $\underline{\boldsymbol{v}} = \mathrm{grad}\, \phi$
- $\int_\omega \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \;\mathrm{d}\underline{\boldsymbol{s}} = \int_a^b \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{\gamma}}(t)) \dot{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \;\mathrm{d}t = \Phi\left(\underline{\boldsymbol{\gamma}}(b)\right) - \Phi\left(\underline{\boldsymbol{\gamma}}(a)\right)$ (wegunabhängig)
- $\oint_\omega \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \;\mathrm{d}\underline{\boldsymbol{s}} = 0 \quad \forall C^1$-Kurven in D
- $\underline{\boldsymbol{v}}$ konservativ auf $D \Rightarrow$ auch auf jeder Teilmenge von D
- **Stammfunktion:** Es gilt $\partial_i \Phi = v_i \;\to\; \Phi = \int v_i \;\mathrm{d}x_i + c(\underline{\boldsymbol{x_k}}) \quad k \neq i$

4. Fourierreihe

ist die Entwicklung einer Funktion $f \in C(T)$ in eine Reihe aus $\sin$ und $\cos$.
$C(T)$: T-**periodisch, stetig fortsetzbar**
f ist T-periodisch, falls $f(x+T) = f(x) \to$ auch $n \cdot T$ periodisch.

4.1. Entwicklung in Fourierreihen $f(x) \sim S_f(x)$

- Bestimme die Fourierkoeffizienten zu $f \in C(T)$:

$$a_k, b_k \in \mathbb{R}: \quad \boxed{\begin{Bmatrix} a_k \\ b_k \end{Bmatrix} = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left(k \frac{2\pi}{T} x\right) \;\mathrm{d}x}$$

a_0 **immer separat berechnen mit** $k = 0$**!**

$$c_k \in \mathbb{C}: \quad \boxed{c_k = \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \exp\left(-\mathrm{j} k \frac{2\pi}{T} x\right) \;\mathrm{d}x}$$

c_0 **immer separat berechnen mit** $k = 0$**!**

- Aufstellen der Fourierreihe S_f zu f:

$$\boxed{S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} x\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{T} x\right)}$$

$$\boxed{S_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\mathrm{j} k \frac{2\pi}{T} x\right)}$$

Konvergenz: $S_f(x) \sim f(x) \;\Rightarrow\; f$ **in** x **stetig & stückweise stetig differenzierbar** $\Rightarrow S_f(x) = f(x)$

f nicht in x stetig $\Rightarrow x = a_i$ und $S_f(x) = \frac{f(a_i^+) + f(a_i^-)}{2}$

4.2. Rechenregeln

Linearität	$\alpha f + \beta g \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \alpha c_k + \beta d_k$	
Konjugation	$\overline{f} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \overline{c_{-k}}$	
Zeitumkehr	$f(-t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; c_{-k}$	
Streckung	$f(\gamma t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; c_k; \gamma > 0; \tilde{T} = \frac{T}{\gamma}$	
Verschiebung t	$f(t+a) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{\mathrm{j}k\omega a} c_k$	
Verschiebung ω	$e^{\mathrm{j}n\omega t} f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; c_{k-n}$	
Ableitung	$\dot{f}(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathrm{j}k\omega c_k$	
Stammfunktion	$\int_0^t f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \begin{cases} \frac{c_k}{\mathrm{j}k\omega} & k \neq 0 \\ -\frac{1}{T} \int_0^T t f(t) \;\mathrm{d}t & k = 0 \end{cases}$	
	$c_{0_{f(t)}} \overset{!}{=} 0$	
Faltung	$f * g \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; c_k d_k$	

4.3. Symmetrien

- f gerade (achsensym.) Funktion: $f(\frac{T}{2} + t) = f(\frac{T}{2} - t)$
  $c_k = c_{-k}$ & $b_k = 0$
  $a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(k \frac{2\pi}{T} x\right) \;\mathrm{d}x$
- f ungerade (punktsym.) Funktion: $f(\frac{T}{2} + t) = -f(\frac{T}{2} - t)$
  $c_k = -c_{-k}$ & $a_k = 0$
  $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(k \frac{2\pi}{T} x\right) \;\mathrm{d}x$
- f $\frac{T}{2}$-periodisch: $f(\frac{T}{2} + t) = f(t)$
  $c_{2k+1} = a_{2k+1} = b_{2k+1} = 0$
  $\begin{cases} a_{2k} \\ b_{2k} \end{cases} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t) \begin{cases} \cos(2k\omega t) \\ \sin(2k\omega t) \end{cases} \;\mathrm{d}t$
- f ohne $\frac{T}{2}$-periodischen Anteil: $f(\frac{T}{2} + t) = -f(t)$
  $c_{2k} = a_{2k} = b_{2k} = 0$
  $\begin{cases} a_{2k+1} \\ b_{2k+1} \end{cases} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t) \begin{cases} \cos((2k+1)\omega t) \\ \sin((2k+1)\omega t) \end{cases} \;\mathrm{d}t$

4.4. Umrechnungsformeln

- $a_0 = 2c_0 \quad a_k = c_k + c_{-k} \quad b_k = \mathrm{j}(c_k - c_{-k})$
- $c_0 = \frac{a_0}{2} \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{j}b_k) \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{j}b_k)$

4.5. LTI-Systeme

$L[y](t) = a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = x(t)$
$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \to s^n \to P(s) = a_n s^n \cdots + a_1 s + a_0$
$h_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{\mathrm{j}k\omega t}$ mit $d_k = \frac{1}{P(\mathrm{j}k\omega)}$
$y(t) = h_T(t) * x(t) = \int_0^T h_T(\tau) x(t-\tau) \;\mathrm{d}\tau$

4.6. Umrechnung von T in S periodische Funktionen

f ist T periodisch, $g(x) = f\left(\frac{T}{S}x\right)$, S periodisch, denn $g(x+S) = f\left(\frac{T}{S}(x+S)\right) = f\left(\frac{T}{S}x + T\right) = f\left(\frac{T}{S}x\right) = g(x)$

4.7. Funktionen

4.7.1 Sägezahnfunktion

$s(t) = \frac{1}{2}(\pi - t), \quad 0 < t < 2\pi, \quad T = 2\pi, \quad \omega = 1$
$c_0 = 0; \qquad c_k = \frac{1}{2k\mathrm{j}}$
$S_f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{e^{\mathrm{j}kt} - e^{-\mathrm{j}kt}}{2\mathrm{j}}$

5. Fouriertransformation $f(t) \to F(\omega)$

Voraussetzungen:

1. f stückweise stetig differenzierbar
2. $f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \;\mathrm{d}t < \infty$ (f absolut integrierbar)

$f \to F$ mit Zeitfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und Frequenzfkt./Spektralfkt F

$$\boxed{F(\omega) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-\mathrm{j}\omega t) \;\mathrm{d}t}$$

Wichtige Fouriertransformationen:

$f(t)$		$F(\omega)$	$f(t)$		$F(\omega)$
1	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\pi\delta(\omega)$	$\lvert t^n \rvert$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2n!}{(\mathrm{j}\omega)^{n+1}}$
t^n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\pi \mathrm{j}^n \delta^{(n)}(\omega)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(a+\mathrm{j}\omega)^n}$
$\mathrm{u}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega)$	$\delta(t - t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-\mathrm{j}\omega t_0}$

5.1. Die Dirac'sche Deltafkt. $\delta(t)$

$\delta_\varepsilon(t - t_0) = \frac{1}{\varepsilon}$, für $t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon$, sonst 0
Für stetiges g gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(t - t_0) \;\mathrm{d}t = g(t_0)$
$\Delta_{t_0}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \exp(-\mathrm{j}\omega t) \;\mathrm{d}t = \exp(-\mathrm{j}\omega t_0)$
$\delta(t - t_0) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \Delta_{t_0}(\omega)$ und $\delta(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; 1$

5.2. Heaviside-Funktion $\mathrm{u}(t)$

$$\mathrm{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases} \qquad \approx \lim_{a \to 0} \exp(-at)$$

5.3. Die Inverse Fouriertransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(\mathrm{j}\omega t) \;\mathrm{d}\omega$$

$$\begin{cases} f(t) & , f \text{ stetig in } t \\ \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} & , \text{falls } f \text{ unstetig in } t \end{cases}$$

5.4. Rechenregeln

Linearität	$\alpha f(t) + \beta g(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$
Konjugation	$\overline{f(t)} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \overline{F(-\omega)}$
Skalierung	$f(ct) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{\lvert c \rvert} F\left(\frac{\omega}{c}\right)$
Verschiebung t	$f(t - a) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \exp(-\mathrm{j}\omega a) F(\omega)$
Verschiebung ω	$\exp(\mathrm{j}\tilde{\omega} t) f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega - \tilde{\omega})$
Ableitung t	$f'(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathrm{j}\omega F(\omega)$
Ableitung ω	$t f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathrm{j}F'(\omega)$
Faltung	$(f * g)(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega) \cdot G(\omega)$

5.5. Lineare DGLn

$$L[y](t) = P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) y(t) = b(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; P(\mathrm{j}\omega) Y(\omega) = B(\omega)$$

$$Y(\omega) = \underbrace{\frac{1}{P(\mathrm{j}\omega)}}_{H(\omega) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; h(t)} B(\omega)$$

$y(t) = h * b(t)$

6. Laplacetransformation $\quad \mathcal{L}(f(t)) = F(s)$

$$\boxed{f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s) := \int\limits_0^{\infty} f(t) \exp(-st) \;\mathrm{d}t}$$

Voraussetzung: $|f(t)| \leq M e^{\sigma t} \quad \forall t > 0; \qquad \sigma = Re(s)$

1	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}$	$\delta(t - t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	e^{-st_0}
t^n	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	e^{at}	$\overset{s>a}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2+1}$	$\cos(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+1}$
$\sin(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

$$e^{-at} \sin(\omega t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$
$$e^{-at} \cos(\omega t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

Linearität: $\alpha f(t) + \beta g(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \alpha F(s) + \beta G(s)$
Ähnlichkeit: $f(ct) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
Ableitung Originalfkt: $f'(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; sF(s) - f(0)$
$f''(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \ldots - f^{(n-1)}(0)$
Integral Originalfkt: $\int_0^t f(x) \;\mathrm{d}x \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{s} F(s)$
Ableitung Bildfkt: $(-t)^n f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F^{(n)}(s)$
Verschiebung: $f(t - a)\mathrm{u}(t - a) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-as} F(s)$
Dämpfung: $e^{-at} f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s + a)$
Faltung: $(f * g)(t) := \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) \;\mathrm{d}\tau \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s) \cdot G(s)$
Inverse: $f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int\limits_{\gamma - \mathrm{j}\infty}^{-\gamma + \mathrm{j}\infty} F(s) \exp(st) \;\mathrm{d}s$

Es gibt eine eineindeutige Korespondens zwischen den Originalfkt und Bildfkt. Meist Nennergrad $>$ Zählergrad: Bruch geschickt umformen! Laplacetransformierte als Summe nie auf gemeinsamen Nenner bringen!!

7. Differentialgleichungen DGL

Anfangswertproblem AWP = DGL + Anfangsbedingung:
$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = s(t) \quad f(0) = d, f'(0) = e$
$\to$ falls DGL höherer Ordnung $\to$ Vogel-Strauß-Algorithmus

7.1. DGL LaPlace-Transformierbar

Falls gilt $f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s)$ und $s(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; S(s)$:
Laplacetrafo: $a\left(s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)\right) + b\left(sF(s) - f(0)\right) + cF(s) = S(s)$
$F(s) = \frac{a(sd+e)+bd}{as^2+bs+c} + S(s) \frac{1}{as^2+bs+c}$
Rücktransformation von $F(s)$ liefert die Lösung $f(t)$

7.2. DGL-Systeme + Anfangsbedingung

$\dot{\underline{\boldsymbol{f}}} = \underline{\boldsymbol{A}}\,\underline{\boldsymbol{f}} + \underline{\boldsymbol{s}}(t)$
1. Ordnung + 2 Gleichungen und $x(0) = x_0; y(0) = y_0$
$\dot{x}(t) = ax(t) + by(t) + s_1(t)$
$\dot{y}(t) = cx(t) + dy(t) + s_2(t)$
Falls alle Funktionen LaPlace transformierbar

$$\begin{bmatrix} s - a & -b \\ -c & s - d \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1(s) \\ S_2(s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

7.3. Integralgleichungen vom Volterra-Typ

$a \cdot f(t) + \int_0^t k(t - x) f(x) \;\mathrm{d}x = s(t)$
Falls alle Fkt. Ltrafobar: $aF(s) + K(s) \cdot F(s) = S(s)$

7.4. seperierbare DGL

Form: $y' = f(x) \cdot g(y)$; Lösung: $\int \frac{1}{g(y)} \;\mathrm{d}y = \int f(x) \;\mathrm{d}x$

7.5. lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

7.5.1 homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_0 y = 0$

- Stelle die charakteristische Gleichung $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$ auf
- Bestimme alle Lösungen von $p(\lambda)$
- Gib n linear unabhängige Lösungen der DGL an:

– Ist λ eine m-fache reelle NST, dann wähle $y_1 = e^{\tilde{\lambda} x}, \quad y_i = x^i e^{\lambda x}$

- Ist λ eine m-fache konjugiert komplexe NST $\lambda = a + \mathrm{j}b$, dann streiche $\overline{\lambda}_i$ und wähle $y_1 = e^{ax}\cos(bx)$, $y_2 = e^{ax}\sin(bx)$ bzw. $y_i = x^i e^{ax}\sin(bx)$ und $y_{i+1} = x^i e^{ax}\cos(bx)$

- $y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ mit $c_1, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ ist Lösung der DGL

7.5.2 inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_0 y = s(t)$

- Löse homogene DGL ($s = 0$), liefert y_h
- Partikuläre Lösung y_p durch **Variation der Konstanten**
  - Stelle ein $y_p(x)$ mit variablen Konstanten $c(x)$ auf
  - Löse das System:
    $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$
    $c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{1}{a_n} s(x)$
    Beachte dabei auch die Ableitung nach der Produktregel
  - Erhalte $c(x)$ durch unbestimmte Integration aus $c'(x)$
  - $y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$ ist die partikuläre Lösung
- Partikuläre Lsg. y_p durch Ansatz vom komischen Typ auf der rechten Seite
  - Idee: y_p hat die Form von $s(x)$
    Falls $s(x) = (b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m) e^{ax} \begin{cases} \cos(bx) \\ \sin(bx) \end{cases}$, dann
    $y_p = x^r \cdot \left[(A_0 + A_1 x + \ldots + A_m x^m) \cos(bx) + (B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m) \sin(bx) \right] e^{ax}$
    mit $a + b\mathrm{j}$ ist r-fache Nullstelle(Resonanz) vom char. Poly. von y_h
    Tipp: Bei Summen im Störglied entkoppelt, d.h. y_p getrennt berechnen und addieren.
- Die Lösung der DGL ist $y = y_p + y_h$

7.6. Die exakte DGL

DGL der Form: $\boxed{f(x,y) + g(x,y) \cdot y' = 0}$
bzw. $f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$

Bedingung für Exaktheit: $\partial_y f = \partial_x g$

Gradientenfeld $v(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$ hat Stammfkt. $F(x, y(x)) = C$

- Bestimme die Stammfunktion $F(x,y)$ von v durch sukzessive Integration:
  - $(*)$ $F(x,y) = \int f dx + G(y)$
  - Bestimme $G'(y)$ aus $F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = g$
  - Bestimme $G(y)$ aus $G'(y)$ durch Integration
  - Erhalte $F(x,y)$ aus Schritt $(*)$
- Löse $F(x,y) = c$ nach $y = y(x)$ auf, falls möglich
- Die von c abhängige Lsg. ist die allg. Lsg. der DGL

7.7. Integrierende Faktoren – der Eulen-Multiplikator

Multipliziere nicht exakte DGL mit integrierenden Faktor $\mu(x,y)$ und erhalte eine exakte DGL mit gleichen Lösungen.

$\partial_y(\mu f) = \partial_x(\mu g) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_y f + \mu f_y = y_x g + \mu g_x}$

Ist $\frac{\partial_y f - \partial_x g}{g} = u(x)$ so ist $\mu = \exp(\int u(x)\,\mathrm{d}x)$
Ist $\frac{\partial_x g - \partial_y f}{f} = u(y)$ so ist $\mu = \exp(\int u(y)\,\mathrm{d}y)$

7.8. Die euler-homogene DGL

Form $y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \Rightarrow$ Substitution: $z = \frac{y}{x}$

$\boxed{y' = z + xz' = \phi(z)}$ Löse $z' = (\phi(z) - z) \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = xz$

7.9. eulersche DGL

DGL in der Form $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot y^{(i)}(x) = s(x)$

Lösungsmenge $\underset{\text{alg. Lös.}}{L_a} = \underset{\text{part. Lös.}}{y_p} + \underset{\text{hom. Lös.}}{L_n}$ durch V.d.K.

Löse char. Pol.: $a_n \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - (n-1)) + \ldots + a_1 \alpha_1 + a_0 = 0$

Wähle Basisvektoren des Lösungsraumes:

- m-fache Nullstelle $\in \mathbb{R}$:
  $x^\alpha, \ldots, x^\alpha (\ln x)^{m-1}$
- m-fache Nullstelle $\in \mathbb{C}$ (streiche $\overline{\alpha_i}$):
  $x^a \sin(b \ln x), \ldots, x^a \sin(b \ln x)(\ln x)^{m-1}$
  $x^a \cos(b \ln x), \ldots, x^a \sin(b \ln x)(\ln x)^{m-1}$

Lösung: (z.B. für 2 Nullstellen $\in \mathbb{R}$): $y(x) = C_1 x^\alpha + C_2 x^\alpha \ln(x)$

7.10. Potenzreihenansatz

Geg. DGL $y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = s(x)$

Falls $a_i(x) \approx \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^{(a_i)} \cdot (x-a)^k$ und $s(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^{(s)} \cdot (x-a)^k$

Dann $\exists y(x) = \sum\limits_{0}^{\infty} c_k \cdot (x-a)^k$ eine Lsg der DGL.

Die c_k bestimmt man durch einsetzen von $y(x)$ + Koeff. Vergleich.

7.11. Homogene lineare DGL Systeme

$\rightarrow$ Jede DGL lässt sich als DGL System darstellen

Transformiere eine DGL 2. Ordnung in ein DGL System 1. Ordnung:

- Substituiere $\dot{x} = y$
- Schreibe DGL-System:
  $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (Bestimme a_1 und a_2 aus DGL)

Löse das DGL-System (Das System ist ohnehin an allem Schuld ;))

1. Bestimme EW λ_i und Basis aus EV $\underline{\boldsymbol{b}}_i$ von $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$
2. Setze $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}} = (\underline{\boldsymbol{b}}1, \ldots, \underline{\boldsymbol{b}}_n)$ und bestimme $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^{-1}$ und $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^{-1} \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}$
3. Berechne $e^{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} = \exp(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}} \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^{-1}) = \underset{\sim}{\boldsymbol{S}} e^{\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}} \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^{-1}$

$\underline{\boldsymbol{y}}' = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \underline{\boldsymbol{y}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\boldsymbol{y}} = \underline{\boldsymbol{c}} \cdot e^{(x - x_0)\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \cdot e^{\lambda_i x} \cdot b_i$

Bei komplexen EW: Trennung in Real und Imaginärteil

7.12. Lösung für $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ falls $\boldsymbol{A}$ nicht diagbar

$\rightarrow$ Es existiert eine Jordan-Normalform $\underset{\sim}{\boldsymbol{J}}$ mit $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^{-1} \underset{\sim}{\boldsymbol{A}} \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}$

$e^{\underset{\sim}{\boldsymbol{J}}} = e^{\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{N}}} = e^D e^N = e^D \cdot (\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_k + \underset{\sim}{\boldsymbol{N}} + \frac{1}{2} \underset{\sim}{\boldsymbol{N}}^2 + \ldots + \frac{1}{k!} \underset{\sim}{\boldsymbol{N}}^k)$

$e^{x\underset{\sim}{\boldsymbol{N}}} = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{1}{2}x^2 & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} \\ & 1 & x & & \\ 0 & & 1 & & \end{bmatrix}$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}$ ist die Transformationsmatr. auf Jordan-Normalform:
$\underset{\sim}{\boldsymbol{S}} = (\underline{\boldsymbol{b}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{b}}_n)$ mit $\underline{\boldsymbol{b}}_1 \ldots \underline{\boldsymbol{b}}_n$ sind EV bzw. HV von $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$

Allgemeine Lösung:

$\boxed{\underline{\boldsymbol{y}}(x) = e^{x\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}} \cdot \underline{\boldsymbol{c}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{S}} e^{x\underset{\sim}{\boldsymbol{J}}} \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^{-1} = \underset{\sim}{\boldsymbol{S}} e^{x(\underset{\sim}{\boldsymbol{D}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{N}})} \underline{\boldsymbol{c}}}$

Die Lösungsformel für (1×1), (2×2) und (3×3) Kästchen
$y_a(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} v_1$
$+ c_2 e^{\lambda_2 x} v_2 + c_3 e^{\lambda_2 x}(x v_2 + v_3)$
$+ c_4 e^{\lambda_3 x} v_4 + c_5 e^{\lambda_3 x}(x v_4 + v_5) + c_6 e^{\lambda_3 x}(\frac{1}{2} x^2 v_4 + x v_5 + v_6)$

$\rightarrow v_1, v_2, v_4$ EV, v_3, v_5 HV 2. Stufe und v_6 HV 3. Stufe

7.13. Lösen von allgemeinen DGL-Systemen

DGL-System: $\dot{\underline{\boldsymbol{y}}}(t) = \underset{\sim}{\boldsymbol{A}}(t) \cdot \underline{\boldsymbol{y}}(t) + \underline{\boldsymbol{b}}(t)$

1. Finde n lin. unabhäng. Lösungsvektoren $\underline{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{y}}_n$ mit der Wronski Determinante $W(t) = \det(\underline{\boldsymbol{y}}_1, \ldots, \underline{\boldsymbol{y}}_n) \overset{!}{\neq} 0$
2. Bestimme $\underline{\boldsymbol{y}}_p = \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}(t) \underline{\boldsymbol{c}}(t)$ durch Variation der Konstanten
   $c(t) = \int \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-1}(t) \underline{\boldsymbol{b}}(t)\,\mathrm{d}t$ bzw. $\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}} \cdot \underline{\boldsymbol{c}}'(t) = \underline{\boldsymbol{b}}$
3. Bestimme $\underline{\boldsymbol{y}} = \underline{\boldsymbol{y}}_p + \sum c_i \underline{\boldsymbol{y}}_i$ mit $c_i \in \mathbb{R}$

Gleichgewichtspunkt: $A y_g + b = 0 \rightarrow (A|b) \rightarrow (E|y_g)$
Stabilität:

- $Re(\lambda_i) < 0 \rightarrow$ asymptotisch stabil
- $Re(\lambda_i) > 0 \rightarrow$ instabil
- $Re(\lambda_i) \leq 0 \rightarrow$ stabil

Auch wichtig: Schrödingers Katze