Mathematik 4

1. Nützliches Wissen $e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i} \cdot \sin(x)$

1.1. Sinus, Cosinus $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1\frac{1}{2}\pi$	2π
φ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$	$\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x) + x\sin(x)$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) - x\cos(x)$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \sin(x)\cos(x)\right)$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \sin(x)\cos(x)\right)$
$\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$	$\int \cos(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$

Sinus/Cosinus Hyperbolicus $\sinh, \cosh$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\mathrm{i}\,\sin(\mathrm{i}x)$ $\qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(\mathrm{i}x)$ $\qquad \cosh x + \sinh x = e^x$

Kardinalsinus $\mathrm{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ $\qquad$ genormt: $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

1.2. Integrale $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x = (e^x)'$

Partielle I: $\int uw' = uw - \int u'w = w(b)u(b) - w(a)u(a) - \int_a^b u'w$

Substitution: $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{[}{0}.1em]1q + 1x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{[}{0}.1em]2\sqrt{ax^3}3$	$\sqrt{ax}$	$\frac{[}{0}.1em]a2\sqrt{ax}$
$x\ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\frac{1}{a^2}e^{ax}(ax-1)$	$x \cdot e^{ax}$	$e^{ax}(ax+1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x\ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{[}{0}.1em]1\cos^2(x)$

$\int e^{at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t = e^{at}\frac{a\sin(bt)+b\cos(bt)}{a^2+b^2}$

$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{at+b}} = \frac{2\sqrt{at+b}}{a}$ $\qquad \int t^2e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{(ax-1)^2+1}{a^3}e^{at}$

$\int te^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{at-1}{a^2}e^{at}$ $\qquad \int xe^{ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}e^{ax^2}$

1.3. Wichtige Formeln

Dreiecksungleichung:	$\lvert\lvert x\rvert - \lvert y\rvert\rvert \le \lvert x \pm y\rvert \le \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$
Cauchy-Schwarz-Ungleichung:	$\left\lvert \underline{\boldsymbol{x}}^\top \cdot \underline{\boldsymbol{y}}\right\rvert \le \lVert\underline{\boldsymbol{x}}\rVert \cdot \lVert\underline{\boldsymbol{y}}\rVert$
Bernoulli-Ungleichung:	$(1+x)^n \ge 1 + nx$
Aritmetrische Summenformel	$\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
Geometrische Summenformel	$\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Binomialkoeffizient	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ $\qquad \lvert\boldsymbol{z}\rvert^2 = \boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^* = x^2 + y^2$

$r = \sqrt{x^2+y^2}, \varphi = tan^{-1}(\frac{y}{x}), x = rcos(\varphi), y = rsin(\varphi)$

1.4. Determinante von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $\det(A) = \lvert A\rvert$

$\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix} = \det(\boldsymbol{A})\cdot\det(\boldsymbol{D})$

Hat $\boldsymbol{A}$ 2 linear abhäng. Zeilen/Spalten $\Rightarrow \lvert\boldsymbol{A}\rvert = 0$

Entwicklung. n. $i$ter Zeile: $\lvert\boldsymbol{A}\rvert = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\cdot a_{ij}\cdot\lvert\boldsymbol{A}_{ij}\rvert$

Inverse 2×2: $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

1.5. Exponentialfunktion und Logarithmus $e^0 = e^{i2\pi} = 1$

$a^x = e^{x\ln a}$ $\qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\qquad \ln x \le x - 1$

$\ln(x^a) = a\ln(x)$ $\qquad \ln(\frac{x}{a}) = \ln x - \ln a$ $\qquad \log(1) = 0$

1.6. Reihen

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \to \infty$ Harmonische Reihe

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n \overset{\lvert q\rvert<1}{=} \frac{1}{1-q}$ Geometrische Reihe

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = e^z$ Exponentialreihe

2. Grundlagen der Numerik

Begriffe:

Numerik	liefert zahlenmäßige Lösung eines Prob. mit Algo
Kondition	Ein Maß wie stark sich Eingabefehler auf die Ausgabe auswirken. $\kappa = \frac{\lVert\delta f\rVert}{\lVert\delta x\rVert} \to \lvert f'(x)\rvert$
$f(x)$	Mathematisches Problem f mit exakter Eingabe x
$\tilde{f}(\tilde{x})$	Numerischer Algorithmus $\tilde{f}$ mit gerundeter Eingabe $\tilde{x}$

2.1. Zahlen und Arithmetik im Rechner

Gleitkommazahlen nach IEEE 754: $\quad Wert = (-1)^s \cdot 2^{e-127}\cdot 1.f$

$s \in \{-1; 1\}$: Vorzeichen, $e \in \mathbb{Z}$: Exponent, $f \in \mathbb{N}$: Mantisse

Anzahl der Maschinenzahlen $\lvert\mathbb{M}\rvert = 2a(b-1)b^{t-1} + 1$

Maschinengenauigkeit (Abstand von 1 zur nächst größeren Zahl)

In MATLAB: 64bit $:eps \approx 2 * 10^{-16}$ $\quad$ 32bit:$eps \approx 1 * 10^{-7}$ `var=1; while 1+var>1; var=var/2; end; maschgen=var*2`

2.2. Kondition:

$\kappa_{\text{abs}}(x) = \lvert f'(x)\rvert$ $\quad \kappa_{\text{rel}}(x) = \frac{\lvert f'(x)\rvert\cdot\lvert x\rvert}{\lvert f(x)\rvert}$ $\quad \kappa(A) = \left\lVert A^{-1}\right\rVert\cdot\lVert A\rVert$

Nichtlin. Gl.: $f(\bar{x}) = 0 \cap f \in C^1 \to \kappa_{abs} = \left\lVert (f'(\bar{x}))^{-1}\right\rVert$

Falls $\kappa_{\text{rel}} \ll 100$: gute Konditionierung. Prüfe noch ob $det(\boldsymbol{A}) \neq 0$!

Verkettung $h = g(f(x))$ $\quad \kappa^h_{\text{abs}}(x) = \kappa^g_{\text{abs}}(f(x))\kappa^f_{\text{abs}}(x)$

2.3. Fehler

Absolut: $\left\lVert\tilde{f}(x) - f(x)\right\rVert$ $\qquad$ Relativ: $\frac{\left\lVert\tilde{f}(x) - f(x)\right\rVert}{\lVert f(x)\rVert}$

2.4. Stabilität

$\forall x \in X \quad\wedge\quad \tilde{x} : \frac{\lVert x - \tilde{x}\rVert}{\lVert x\rVert} = \mathcal{O}(\epsilon_{b,t})$

Vorwärtsstabil: $\frac{\left\lVert\tilde{f}(x) - f(\tilde{x})\right\rVert}{\lVert f(x)\rVert} = \mathcal{O}(\epsilon_{b,t})$

Rückwärtsstabil: $\forall x \in X : \tilde{f}(x) = f(\tilde{x})$

Horna-Schema für Polynome: $(\ldots((a_n)x + a_{n-1})x + \ldots + a_1)x + a_0$

3. Matrix Zerlegung

3.1. LR-Zerlegung von Matrizen (Lower and Upper)

Geeignetes Lösungsverfahren für $\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}}$, falls $n < 500$

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{R}$ $\quad$ mit $\boldsymbol{R}$ ist obere Dreiecksmatrix

Gaußverfahren durch Matrixmultiplikaiton

- Zerlegen des Problems $\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}}$ in das Problem $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{R}\underline{\boldsymbol{x}}) = \underline{\boldsymbol{b}}$ mit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R}$ bzw. $\boldsymbol{L}\underline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{P}\underline{\boldsymbol{b}}$ (mit Pivotisierung)
- Zerlegungsmatrix (für 2×2):
  $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}a & b\\ \frac{c}{a} & d - \frac{c}{a}b\end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^*$ mit den Eliminationsfaktoren $l_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \overset{z.B.}{=} \frac{c}{a}$
- Für jede Spalte der unteren Dreiecksmatrix wiederholen.
  Für eine 3×3 Matrix bräuchte man 2 Durchläufe, da 3 Spalten Elimationsfaktoren bestimmt werden müssen.
- $\boldsymbol{R} = \mathrm{triu}(\boldsymbol{A}^*)$
  (obere Dreiecksmatrix von $\boldsymbol{A}^*$, inkl. Diagonalelemente)
- $\boldsymbol{L} = \mathrm{tril}(\boldsymbol{A}^*, -1) + \boldsymbol{1}$
  (untere Dreiecksmatrix mit 1en auf der Diagonale.
- Vorwärtseinsetzen: $\boldsymbol{L}\underline{\boldsymbol{y}} = \underline{\boldsymbol{b}}$ bzw. $\boldsymbol{L}\underline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{P}\underline{\boldsymbol{b}}$ (mit Pivotisierung) (Löse nach $\underline{\boldsymbol{y}}$)
- Rückwärtseinsetzen: $\boldsymbol{R}\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{y}}$ $\quad$ (Löse nach $\underline{\boldsymbol{x}}$)

3.1.1 Pivotisierung (Spaltenpivotsuche)

Permutationsmatrix $\boldsymbol{P}^\top = \boldsymbol{P}^{-1}$ vertauscht Zeilen, damit LR Zerlegung bei 0 Einträgen möglich ist. Tausche so, dass man durch die betragsmäßig größte Zahl dividiert (Pivoelement)

3.2. QR-Zerlegung

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$ mit $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\top$

Verfahren: Housholder (numerisch stabil) , Gram-Schmidt, Givens Rotation.

$\boldsymbol{A} \xrightarrow{EZF} \boldsymbol{H}\boldsymbol{A} \xrightarrow{EZF} \tilde{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}^\top\tilde{\boldsymbol{H}}^\top\boldsymbol{R}$

Aufgabe: Finde Vektor $\underline{\boldsymbol{v}}$ der Senkrecht auf $\boldsymbol{H}$ steht.

Q/R Zerlegung für $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

- Setze $\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{s}}_1$ (erste Spalte) und $\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{a}} + \mathrm{sgn}(a_1)\lVert\underline{\boldsymbol{a}}\rVert\,\underline{\boldsymbol{e}}_1$
- Konstruiere die **Householder** Transformationsmatrix mit $\boldsymbol{H}_v = \boldsymbol{E}_m - \frac{2}{\underline{\boldsymbol{v}}^\top\underline{\boldsymbol{v}}}\underline{\boldsymbol{v}}\underline{\boldsymbol{v}}^\top$
- Erhalte die Matrix $\boldsymbol{H}_v\boldsymbol{A}$ die in der ersten Spalte bis auf das Element a_{11} nur Nullen enthält
- Setze $\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{H}_v$
- Wende den gleichen Algorithmus auf die Untermatrix $\boldsymbol{A}^*$ ($\boldsymbol{H}_v\boldsymbol{A}$ ohne erste Zeile und Spalte) an.
- Setze anschließend $\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{H}_v$ und fülle mit erweitere mit E_m (d.h. erste Zeile und Spalte die von E_m)
- Nach $p = \min\{m-1, n\}$ Schritten: $\boldsymbol{H}_v\boldsymbol{A}^*$ ist obere Dreiecksmatrix $\to$ Disco, disco, party, party ;)
- Somit ist mit $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_p$ ist $\boldsymbol{Q}^\top\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$
- $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}_p\cdots\boldsymbol{Q}_1 * \boldsymbol{A}$

Anwendungen

Lösen von LGSen mit der QR Zerlegung Bestimme $\underline{\boldsymbol{x}}$ durch Rückwärtssubsitution aus $\boldsymbol{R}\underline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q}^\top\underline{\boldsymbol{b}}$

Anwendung in der linearen Ausgleichsrechnung (Minimierung d. Restes)

Lösen der Normalengleichung $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}^\top\underline{\boldsymbol{b}}$

- Bestimme eine reduzierte QR-Zerlegung $\boldsymbol{A} = \tilde{\boldsymbol{Q}}\tilde{\boldsymbol{R}}$ mit $\tilde{\boldsymbol{Q}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\tilde{\boldsymbol{R}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- Löse $\tilde{\boldsymbol{R}}\underline{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{Q}}^\top\underline{\boldsymbol{b}}$

$\left\lVert\underline{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{x}}\right\rVert^2 = \left\lVert\boldsymbol{Q}^\top(\underline{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{x}})\right\rVert^2 = \left\lVert\tilde{\underline{\boldsymbol{b}}} - \tilde{\boldsymbol{R}}\underline{\boldsymbol{x}}\right\rVert^2 + \lVert\underline{\boldsymbol{c}}\rVert^2 \ge \left\lVert\underline{\boldsymbol{c}}^2\right\rVert$

4. Fixpunktiteration

Nullstellenproblem $f(x) = 0$

Fixpunktproblem $\varphi(x) = x$ $\qquad$ mit $\varphi(x) = g(x)f(x) + x$

Rekursive Lösung: $\boxed{x_{i+1} = \varphi(x)}$

MATLAB: `x=s; for k=1:n; x=phi(x); end`

4.1. Konvergenz von Iterationsverfahren

Falls $(x_k)_k$ mit $x_0 = s$ und $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ dann ist der Grenzwert von $(x_k)_k$ ein Fixpunkt von φ, denn $x = \lim\limits_{k\to\infty}\varphi(x_k) = \varphi(\lim\limits_{k\to\infty}x_k) = \varphi(x)$

Fehler $e_k = \lvert x_k - x_*\rvert$

Libschitzstetig: $\exists L < \infty : \lVert f(a) - f(b)\rVert \le L\lVert a - b\rVert$

Stabiler Fixpunkt bei: $\lvert\varphi'\rvert < 1$

Globaler Konvergenzsatz von Banach für $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$

Falls

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen (Bspl: bei $D \in [0,1]$)
- $f(D) \subseteq D$ (Selbstabbildung)
- $\exists L = \sup\limits_{x\in D}\left\lVert\varphi'(x)\right\rVert < 1$ $\quad$ (Kontraktion)

Dann konvergiert $\varphi\ \forall x_0 \in D$ eindeutig gegen x_* und es gilt folgende Fehlerabschätzung:

- A-Priori: $\lVert x_k - x_*\rVert \le \frac{L^k}{1-L}\lVert x_1 - x_0\rVert \le \varepsilon$
- A-posteriori: $\lVert x_k - x_*\rVert \le \frac{L}{1-L}\lVert x_k - x_{k-1}\rVert$
- Für Genauigkeit ε: $k \ge \ln\left(\frac{\varepsilon(1-L)}{\lVert x_1 - x_0\rVert}\right) / \ln(L)$

Lokale Konvergenz: $\varphi([a,b]) \subseteq [a,b] \quad\wedge\quad \left\lvert\varphi'([a,b])\right\rvert < 1$

Lokale Konvergenz ohne Norm: Falls $\max\lambda_i < 1$ mit λ_i is EW von $\boldsymbol{J}_\varphi$

5. Iterative Näherungsverfahren

Problemstellung

Schreibe $\boldsymbol{A}\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}}$ in ein Fixpunktproblem um:

Finde $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}$ mit $\boldsymbol{M}$ ist invertierbar. $\quad\Rightarrow (\boldsymbol{M} - \boldsymbol{N})\underline{\boldsymbol{x}} = \underline{\boldsymbol{b}}$

$\boxed{\phi(\underline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}\underline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{M}^{-1}\underline{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{T}\underline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}}$

Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ konvergent, falls Spektralradius $\rho(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}) < 1$

Je kleiner der Spektralradius von $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ desto bessere Konvergenz.

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}$	Systemmatrix
$\boldsymbol{D}$	Diagonalmatrix `diag(diag(`$\boldsymbol{A}$`))`
$\boldsymbol{L}$	negative linke untere Dreiecksmatrix
$\boldsymbol{R}$	negative rechte obere Dreiecksmatrix

Wichtige Begriffe

Diagonaldominante Matrix: Diagonalelemente sind größer als die restlichen Elemente der selben Zeile: $\lvert a_{ii}\rvert > \sum_j \lvert a_{ij}\rvert$ mit $j \neq i$

Spektralradius $\rho(\boldsymbol{A})$ einer Matrix $\boldsymbol{A}$: Betragsmäßig größter Eigenwert.

Konvergenzbeweis aller Verfahren: Gershgorinkreise um die Null mit $r \le 1$

5.1. Jacobiverfahren

Konvergiert $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, falls $\boldsymbol{A}$ strikt diagonaldominant.

$\underline{\boldsymbol{x}}_0 = s \in \mathbb{R}^n$ $\qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R}))$

$\boxed{\underline{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \phi(\underline{\boldsymbol{x}}_k) = \boldsymbol{D}^{-1}\cdot(\underline{\boldsymbol{b}} + (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{R})\cdot\underline{\boldsymbol{x}}_k)}$

Komponentenweise: $\underline{\boldsymbol{x}}_{k+1} = (a_{ii}^{-1}(b_i - \sum\limits_{j=1, j\neq i} a_{ij}x_{k,j})_i$

```
function R = cholesky(A) %O: 1/3*n^3+1/2*n^2+1/6*n
[m,n]=size(A);
if m~=n, error('A muss quadratisch sein.'); end
R=zeros(n); R(1,1)=sqrt(A(1,1));
if n==1 return; end R(1,2:n)=A(1,2:n)/R(1,1); R(2:n
     ,2:n)=cholesky( A(2:n,2:n) - R(1,2:n)'*R
     (1,2:n) );
end
```

5.2. Gauß-Seidel Verfahren

Unterschied zu Jacobi: Komponentenweise Berechnung von $\boldsymbol{x}$ mit bereits iterierten Werten. (Kürzere Iterationszyklen)

Konvergenz: $\boldsymbol{A}$ ist strikt diagonaldominant **oder** $\boldsymbol{A}$ ist positiv definint.

Komponentenweise Darstellung:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = a_{ii}^{-1}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)}$$

Matrixdarstellung:

$$\boxed{\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L})^{-1} \cdot (\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{b})}$$

Mit $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L}) - R \qquad \boldsymbol{x}_{neu} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}_{alt}$

5.3. SOR (Successive Over-Relaxation) Verfahren

Konvergenz: für $0 < \omega < 2$ und positiv definites $\boldsymbol{A}$

$$\boxed{\boldsymbol{x}_{k+1}^{(neu)} = \omega\boldsymbol{x}_{k+1}^{(alt)} + (1-\omega)\boldsymbol{x}_k}$$

Bestimme ω so, dass die Konvergenz besser wird: $\omega_{opt} = \frac{2}{2-\lambda_1-\lambda_2}$

Matrixdarstellung:

$\boldsymbol{x}_{k+1} = (\boldsymbol{1}_n - \omega\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L})^{-1}((1-\omega)\boldsymbol{1}_n + \omega\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{R})x_k + \omega(1_n - \omega\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{A} = (\frac{1}{\omega}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{L}) - \left((\frac{1}{\omega} - 1)\boldsymbol{D} + \boldsymbol{R}\right)$

Komponentendarstellung:

$x_i^{k+1} = \omega a_{ii}^{-1}\left(\boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) + (1-\omega)x_i^{(k)}$

6. Nichtlineare Gleichungen

Problemstellung

Gegeben nichtlineare, stetige Funktion
$f : [a_0, b_0] \to \mathbb{R}, f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$

6.1. Bisektionsverfahren

Globale, lineare Konvergenz mit $|x^* - x_k| \le \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0)$

Bisektionsverfahren

- $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$
- $a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_k$, falls $f(a_k)f(x_k) < 0$
  $a_{k+1} = x_k,\ b_{k+1} = b_k$, sonst
- Abbruch falls $|b_k - a_k| < \varepsilon$ oder maxiter erreicht

6.2. Newton-Raphson-Verfahren

Funktion durch Gerade annähern und Nullstelle bestimmen. An dieser Stelle den Vorgang wiederholen. Nur geeignet für einfache Nullstellen.
$\exists$ Umgebung U mit $f'(x) \neq 0 \forall x \in U$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}^{-1}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)}$$

MATLAB:
$x = x - \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}} \backslash f$

Abbruchkriterium: $\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}^*\| \le \|\Delta\boldsymbol{x}\| + c\,\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}^*\|$

Konvergenz: Startwerte in Bereiche von FP und 0-Stellen einteilen, Grenzen testen, Ableitung sagt zu welcher Grenze es Konvergiert.

6.2.1 Vereinfachtes Newtonverfahren

Man benutzt die Jacobimatrix über mehrer Iterationen.

Bemerkungen: Es gibt keine Existenz und Eindeutigkeitsaussage zur Lösbarkeit des Nullstellenproblems

$$\boldsymbol{J}_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

7. Optimierung

Problemstellung

$\underset{\text{Zielfunktion}}{f} : \underset{\text{Zulässigkeitsbereich}}{X} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
gesucht: $\min f = \max -f$
$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0$ und $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}^*)$ pos. definit. (Numerische Katastrophe)

7.1. Abstiegsverfahren / Gradientenverfahren

Konvergenz: linear

Abstiegsverfahren

- Bestimme Abstiegsrichtung $\boldsymbol{v}_k : \nabla f(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{v}_k < 0$
  Gradientenverfahren: $\boldsymbol{v}_k = -\nabla f(\boldsymbol{x}_k)$
- Bestimme Schrittweite $\boldsymbol{h}_k : f(\boldsymbol{x}_k + h_k\boldsymbol{v}_k) < f(\boldsymbol{x}_k)$
  Armijo: $\max h_k \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\}$
  $f(\boldsymbol{x}_k + h_k\boldsymbol{v}_k) < f(x_k) + h_k\gamma\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^\top\boldsymbol{v}_k \qquad \gamma \in]0,1[$
- Setze $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + h_k\boldsymbol{v}_k$
- Abbruch, falls $\boldsymbol{x}_k$ approximativ stationär ist.

7.2. Das lokale Newton-Optimierungsverfahren

Geg: $f \in \mathcal{C}^2$, Ges: $\boldsymbol{x}^* : \nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0$

lokales Newton-Optimierungsverfahren

- Wähle Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$
- Falls $\nabla f(x_k) = 0 \to$ Stop: Ergebnis x_k
- Bestimme $\boldsymbol{v}_k$ durch lösen von $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{v}_k = -\nabla f(\boldsymbol{x}_k)$
- Setze $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k$

7.3. Das globale Newton-Optimierungsverfahren

Geg: $f \in \mathcal{C}^2$, Ges: $\boldsymbol{x}^* : \nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0$

globales Newton-Optimierungsverfahren

- Bestimme $\boldsymbol{v}_k$ durch lösen von $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{v}_k = -\nabla f(\boldsymbol{x}_k)$
  Falls $\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^\top\boldsymbol{v}_k \ll 0 \to$ Newtonschritt
  Falls $\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^\top\boldsymbol{v}_k \not\ll 0 \to$ Gradientenverfahren mit Armijo
- Setze $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k$
- Abbruch, falls $\boldsymbol{x}_k$ approximativ stationär ist.

8. Funktionentheorie (Komplexe Funktionen)

8.1. analytische (holomorphe, reguläre) Funktionen $\boldsymbol{f}$

Eine Funktion $\boldsymbol{f}$ ist

analytisch/holomorph	falls $\boldsymbol{f}$ in G komplex differenzierbar ist.
ganz	falls $\boldsymbol{f}$ in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist.
konform	falls Kurven Winkel- und Orientierungstreu bleibt

$\boldsymbol{f}$ ist genau dann holomorph, falls $f(x+yi) = u(x,y) + iv(x,y)$ und

- u, v sind stetig partiell diffbar
- Cauchy-Riemann DGLs sind erfüllt (mit $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$):
  $\partial_1 f_1(z) = \partial_2 f_2(z) \qquad \partial_1 f_2(z) = -\partial_2 f_1(z)$

Holomorph: $\exp, \sin, \cosh$, Polynome, $\boldsymbol{f} \pm \boldsymbol{g}, \boldsymbol{f}\boldsymbol{g}, \frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g})$

```
function [x,n]=bisektion (f,a,b,TOL) fa=feval(f,a);
fb=feval(f,b);
n=0;
if fa==0; x=a; return; end
if fb==0; x=b; return; end
if fa*fb>0; error('sgn(f(a)) == sgn(f(b))'); end
if a>b; error('a>b, leeres Intervall'); end
while b-a>TOL
   x=a+0.5*(b-a);
   fm=feval(f,x);
   if fm==0; break; end
   if fa*fm>0, a=x;
   fa=fm; else, b=x;
   fb=fm; end
   n=n+1;
end
```

8.2. harmonische Funktionen u, v

u bzw. v sind harmonisch, falls gilt:
$\Delta u = \partial_{xx}u + \partial_{yy}u = 0 \qquad \Delta v = \partial_{xx}v + \partial_{yy}v = 0$

oder falls $f(\boldsymbol{z}) = u + iv$ holomorph ist; denn mit Satz von Schwarz:
$\Delta u = \partial_{yx}v - \partial_{xy}v = 0 \qquad \Delta v = -\partial_{yx}u + \partial_{xy}u = 0$

Bestimmung der harmonischen Konjugierten

- geg: harm. Fkt. $u : G \to \mathbb{R}, (x,y) \to u(x,y)$
- ges: harm. Fkt. $v : G \to \mathbb{R}, (x,y) \to v(x,y)$ so, dass $f : G \to \mathbb{V}, f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
- $v(x,y) = \int u_x\,dy$ mit Integrationskonstante $g(x)$
- $v_x = -u_y \Rightarrow g'(x)$
- $g(x) = \int g'(x)\,dx \Rightarrow v$ bis auf Konstante C bestimmt
- zugehörige holomorphe Fkt. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

8.3. Möbiustransformation $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Einzige bijektive, holomorphe, konforme Abbildung von $\hat{\mathbb{C}}$ auf sich selbst.

$\boldsymbol{f} : \mathbb{C}\backslash\{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}\backslash\{-\frac{d}{c}\}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \frac{a\boldsymbol{z}+b}{c\boldsymbol{z}+d} \qquad ad - bc \neq 0$

$\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{w}) = \frac{d\boldsymbol{w}-b}{-c\boldsymbol{w}+a}$

8.4. Komplexes Kurvenintegral

für $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig, $\boldsymbol{\gamma} : [t_1, t_2] \to$ stetig diffbar orientierte Kurve.

So brechnet man ein komplexes Kurvenintegral

- Bestimme Parametrisierung von $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_1 + \ldots$
- Stelle Inegrale auf
  $\int_{\boldsymbol{\gamma}_i} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\,d\boldsymbol{z} = \int_{a_i}^{b_i} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_i(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_i(t)\,dt$
  Falls $\boldsymbol{f}$ holomorph: $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\,d\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(b)) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\gamma}(a))$
- Berechne die Integrale und addiere:
  $\int_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\,d\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{h} \int_{\boldsymbol{\gamma}_i} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\,d\boldsymbol{z}$

8.5. Cauchy-Integralformel

(falls Unstetigkeitsstelle auf Gebiet G) Falls $\boldsymbol{\gamma}$ geschl. doppelpunktfreie Kurve in einfach zsh. Gebiet G mit holomorphen Fkt. $\boldsymbol{f}$, gilt für jedes $\boldsymbol{z}_0 \in G$

$$\boxed{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\boldsymbol{\gamma}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})}{\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0}\,d\boldsymbol{z}}$$

$\boldsymbol{f}^{(k)}(\boldsymbol{z}_0) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_{\boldsymbol{\gamma}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})}{(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0)^{k+1}}\,d\boldsymbol{z}$

8.6. Integralsatz von Cauchy

Falls keine Unstetigkeitsstelle innerhalb der Kurve $\boldsymbol{\gamma}$
$\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{C}$ komplex diffbar auf offenem, einfach zusammenhängendem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. $\boldsymbol{\gamma}$ sei einfach geschlossene Kurve in G (keine Doppelpunkte).
$\oint_{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\,d\boldsymbol{z} = 0$

8.7. Singularitäten

Isolierte Singularität $\boldsymbol{z}_0$: $\quad \boldsymbol{f} : G \setminus \{\boldsymbol{z}_0\} \to \mathbb{C}$ (einzelne Punkte)
Hebbare Sing., falls f auf punktierter Umgebung beschränkt ist.
Pol $m$ter Ordnung: $(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_o)^m\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$ ist hebbar in $\boldsymbol{z}_0$
Wesentliche Singularität: Sonst.

```
%O: 2*n^2 im k-ten Schritt, falls A vollbesetzt
function [x,N] = gauss_seidel(A,b,delta) x=b;
N=0;
for i=1:200
   x=tril(A)\(b-triu(A,1)*x);
   N=N+1;
   if norm(b-A*x)<delta
   return; end
end
error('Keine Konverg. nach 200 Iterationen'); end
```

8.8. Taylorreihe und Laurentreihe

Taylorreihe: falls $\boldsymbol{f}$ holomorph:

$$\boxed{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{f}^{(k)}\boldsymbol{z}_0}{k!}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0)^k}$$

Laurentreihe: Falls $\boldsymbol{f}$ nicht holomorph ist.

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{c}_k(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0)^k}$$

zerfällt in $\sum_{k=1}^{\infty} d_k w^k$ mit $d_k = c_{-k}$ und $w = \frac{1}{z-z_0}$ (Hauptteil) und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ (Nebenteil)

Konvergenz falls Hauptteil und Nebenteil konvergiert.

Konvergenzradien: $R = \lim\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| \in [0, \infty]$

Resiudensatz: $\mathrm{Res}_{z_0}\boldsymbol{f} = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\,dz$

Allgemeiner Residuensatz $\quad G$ Gebiet: $f : G \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ hol.
$\forall$ doppelpunktfrei, geschlossene und pos. orientierte Kurven γ mit $z_1, \ldots z_n$ liegen im Inneren von γ:
$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res_{z_k} f$

$\mathrm{Res}_{\boldsymbol{z}_0}\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{h}} = \frac{\boldsymbol{g}(z_0)}{\boldsymbol{h}'(z_0)} \qquad \mathrm{Res}_{\boldsymbol{z}_0}\frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z})}{(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_0)^m} = \frac{\boldsymbol{g}^{(m-1)}(\boldsymbol{z}_0)}{(m-1)!}$

$\mathrm{Res}_{\boldsymbol{z}_0}\boldsymbol{g}\frac{\boldsymbol{h}'}{\boldsymbol{h}} = m\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}_0) \qquad m$: Ordnung der Polstelle

9. MATLAB

```
%Aufwand: 2*n^2(m-n/3) = O(n^3)
%Anwendung: [Q,R] = qr(A); x = R\(Q'*b);
function A = QRhouseholder(A)
[m,n] = size(A);
for k = 1:min(m-1,n)
   v = A(k:end,k);
   na = norm(v);
   if v(1) >= 0, s = 1;
   else, s = -1; end;
   v(1) = v(1) + s*na;
   v = [1; v(2:end)/v(1)];
   A(k:end,k+1:end) = A(k:end,k+1:end) -
      (2/(v'*v)*v)*(v'*A(k:end,k+1:end));
   A(k,k) = -s*na;
   A(k+1:end,k) = v(2:end);
end
```

```
%Aufwand: 2/3*n^3 + 1/2*n^2 - 1/6*n
%Anwendung (integriert): [L,R,P] = lu(A);
function A = LR(A) [n,~] = size(A);
if ~all(size(A) == n), error('A muss quadratisch ←
      sein.'); end
for k = 1:n
   I = k+1:n;
   A(I,k) = A(I,k)/A(k,k);
   A(I,I) = A(I,I) - A(I,k)*A(k,I);
end
```

```
function [x,k] = newton(f,Df,x,maxit,TOL)
for k=1:maxit
   x_alt = x; x = x - f(x)/Df(x);
   fprintf('%1.15e\n',x)
   if norm(x-x_alt) < TOL, break; end
end
```

```
function [A,p] = LR_pivot(A)
[n,m] = size(A); p = 1:n;
if m~=n, error('A muss quadratisch sein.'); end
for k = 1:n
   [~,j] = max(abs(A(p(k:n),k))); j = j + (k-1);
   p([k,j]) = p([j,k]);
   I = k+1:n;
   A(p(I),k) = A(p(I),k)/A(p(k),k);
   A(p(I),I) = A(p(I),I) - A(p(I),k)*A(p(k),I);
end
```