

1. Nützliches Wissen $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

1.1 Sinus, Cosinus $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$1\frac{1}{2}\pi$	2π
φ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
\sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
\cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
\tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0

Additionstheoreme	Stammfunktionen
$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$	$\int x \cos(x) dx = \cos(x) + x \sin(x)$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$	$\int x \sin(x) dx = \sin(x) - x \cos(x)$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x))$
$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$	$\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x))$
$\sin(x) = \tan(x) \cos(x)$	$\int \cos(x) \sin(x) dx = -\frac{1}{2} \cos^2(x)$

Sinus/Cosinus Hyperbolicus \sinh, \cosh

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -i \sin(ix)$ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix)$ $\cosh x + \sinh x = e^x$

Kardinalsinus $\text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ genormt: $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

1.2 Integrale $\int e^x dx = e^x = (e^x)'$

Partielle Integration: $\int u v' = u v - \int u' v$
 Substitution: $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt$

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1} x^{q+1}$	x^q	$q x^{q-1}$
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	\sqrt{ax}	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x \ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\frac{1}{a^2} e^{ax} (ax - 1)$	$x \cdot e^{ax}$	$e^{ax} (ax + 1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$-\ln \cos(x) $	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

$\int e^{at} \sin(bt) dt = e^{at} \frac{a \sin(bt) + b \cos(bt)}{a^2 + b^2}$

$\int \frac{dt}{\sqrt{at+b}} = \frac{2\sqrt{at+b}}{a}$ $\int t^2 e^{at} dt = \frac{(ax-1)^2 + 1}{a^3} e^{ax}$

$\int t e^{at} dt = \frac{at-1}{a^2} e^{at}$ $\int x e^{ax^2} dx = \frac{1}{2a} e^{ax^2}$

1.3 Exponentialfunktion und Logarithmus

$a^x = e^{x \ln a}$	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$	$\ln x \leq x - 1$
$\ln(x^a) = a \ln(x)$	$\ln(\frac{x}{a}) = \ln x - \ln a$	$\log(1) = 0$

1.4 Determinante von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$: $\det(A) = |A|$

$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$

Hat A 2 linear abhängig. Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$

Entwicklung. n. iter Zeile: $|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$

Inverse 2×2 : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$i = \sqrt{-1}$ $|z|^2 = z z^* = x^2 + y^2$

1.5 Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$ Harmonische Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad q \leq 1 \quad \frac{1}{1-q}$ Geometrische Reihe	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ Exponentialreihe
---	--	--

1.6 Wichtige Formeln

Dreiecksungleichung:	$ x - y \leq x \pm y \leq x + y $
Cauchy-Schwarz-Ungleichung:	$ \underline{x}^T \cdot \underline{y} \leq \ \underline{x}\ \cdot \ \underline{y}\ $
Bernoulli-Ungleichung:	$(1+x)^n \geq 1 + nx$
Aritmetrische Summenformel	$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
Geometrische Summenformel	$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Binomialkoeffizient	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

2. Grundlagen der Numerik

Begriffe:

Numerik	liefert eine zahlenmäßige Lösung eines Problems mit einem Algorithmus.
Kondition	Ein Maß wie stark sich Eingabefehler auf die Ausgabe auswirken. $\kappa = \ \frac{\delta f}{\delta x}\ \rightarrow f'(x) $
$f(x)$	Mathematisches Problem f mit exakter Eingabe x
$\tilde{f}(\tilde{x})$	Numerischer Algorithmus \tilde{f} mit gerundeter Eingabe \tilde{x}

2.1 Zahlen und Arithmetik im Rechner

Gleitkommazahlen nach IEEE 754: $Wert = (-1)^s \cdot 2^{e-127} \cdot 1.f$
 $s \in \{-1; 1\}$; Vorzeichen, $e \in \mathbb{Z}$: Exponent, $f \in \mathbb{N}$: Mantisse

Gleitpunktzahlen:
 $\mathbb{G}_{b,t} = \{x \in \mathbb{G}_{b,t} \mid e_{\min} \leq e_{\max}\} \cup \{\pm\infty, \text{NaN}\}$

Maschinenzahlen:
 $\mathbb{M}_{b,t,e_{\min},e_{\max}} = \{x \in \mathbb{G}_{b,t} \mid e_{\min} \leq e \leq e_{\max}\} \cup \{\pm\infty, \text{NaN}\}$

Anzahl der Maschinenzahlen $|\mathbb{M}| = 2a(b-1)b^{t-1} + 1$

Maschinengenauigkeit $\epsilon_{b,t} = b^{-(t-1)}$
 $\ln \text{ MATLAB: } \epsilon_{2,53} \approx 2 \times 10^{-16}$ Runden: $fl_{b,t}(x)$

2.2 Kondition:

$\kappa_{\text{abs}}(x) = |f'(x)|$ $\kappa_{\text{rel}}(x) = \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}$
 Falls $\kappa_{\text{rel}} \ll 100$: gute Konditionierung

Verkettung $h = g(f(x))$ $\kappa_{\text{abs}}^h(x) = \kappa_{\text{abs}}^g(f(x)) \kappa_{\text{abs}}^f(x)$

2.3 Fehler

Absolut: $\|\tilde{f}(x) - f(x)\|$ Relativ: $\frac{\|\tilde{f}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|}$

2.4 Stabilität

$\forall x \in X \wedge \tilde{x} : \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} = \mathcal{O}(\epsilon_{b,t})$

Vorwärtsstabil: $\frac{\|\tilde{f}(x) - f(\tilde{x})\|}{\|f(x)\|} = \mathcal{O}(\epsilon_{b,t})$

Rückwärtsstabil: $\forall x \in X : \tilde{f}(x) = f(\tilde{x})$

Horna-Schema für Polynome: $(\dots((a_n)x + a_{n-1})x + \dots + a_1)x + a_0$

3. Matrix Zerlegung

3.1 LR-Zerlegung von Matrizen (Lower and Upper)

Geeignetes Lösungsverfahren für $A\underline{x} = \underline{b}$, falls $n < 500$
 $A = \underline{L} \cdot \underline{R}$ mit \underline{R} ist obere Dreiecksmatrix

Gaußverfahren durch Matrixmultiplikation

- Zerlegen des Problems $A\underline{x} = \underline{b}$ in das Problem $\underline{L}(\underline{R}\underline{x}) = \underline{b}$ mit $A = \underline{L}\underline{R}$ bzw. $\underline{L}\underline{y} = \underline{P}\underline{b}$ (mit Pivotsisierung)
- Zerlegungsmatrix (für 2×2):
 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{c}{a} & d - \frac{c}{a}b \end{bmatrix} = A^*$ mit den Eliminationsfaktoren $l_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \quad z_{ik} = \frac{b_{ik}}{a_{kk}}$
- Für jede Spalte der unteren Dreiecksmatrix wiederholen. Für eine 3×3 Matrix bräuchte man 2 Durchläufe, da 3 Spalten Eliminationsfaktoren bestimmt werden müssen.
- $\underline{R} = \text{triu}(A^*)$ (obere Dreiecksmatrix von A^* , inkl. Diagonalelemente)
- $\underline{L} = \text{tril}(A^*, -1) + \underline{1}$ (untere Dreiecksmatrix mit 1en auf der Diagonale)
- Vorwärtseinsetzen: $\underline{L}\underline{y} = \underline{b}$ bzw. $\underline{L}\underline{y} = \underline{P}\underline{b}$ (mit Pivotsisierung) (Löse nach \underline{y})
- Rückwärtseinsetzen: $\underline{R}\underline{x} = \underline{y}$ (Löse nach \underline{x})

3.1.1 Pivotsierung (Spaltenpivotsuche)

Permutationsmatrix $\underline{P}^T = \underline{P}^{-1}$ vertauscht Zeilen, damit LR Zerlegung bei 0 Einträgen möglich ist. Tausche so, dass man durch die betragsmäßig größte Zahl dividiert (Pivoelement)

3.2 QR-Zerlegung

$A = \underline{Q}\underline{R}$ mit $\underline{Q}^{-1} = \underline{Q}^T$
 Verfahren: Housholder (numerisch stabil), Gram-Schmidt, Givens Rotation.

$A \xrightarrow{EZF} \underline{H}\underline{A} \xrightarrow{EZF} \tilde{\underline{H}}\underline{H}\underline{A} = \underline{R} \Rightarrow \underline{A} = \underline{H}^T \tilde{\underline{H}}^T \underline{R}$
 Aufgabe: Finde Vektor \underline{v} der Senkrecht auf \underline{H} steht.

Q/R Zerlegung für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- Setze $\underline{a} = \underline{s}_1$ (erste Spalte) und $\underline{v} = \underline{a} + \text{sgn}(a_{11}) \|\underline{a}\| \underline{e}_1$
- Konstruiere die Housholder Transformationsmatrix mit $\underline{H}\underline{v} = \underline{E}_m - \frac{2}{\|\underline{v}\|} \underline{v}\underline{v}^T$
- Erhalte die Matrix $\underline{H}_1 \underline{A}$ die in der ersten Spalte bis auf das Element a_{11} nur Nullen enthält
- Setze $\underline{Q}_1 = \underline{H}_1$
- Wende den gleichen Algorithmus auf die Untermatrix A^* ($\underline{H}_1 \underline{A}$ ohne erste Zeile und Spalte) an.
- Setze anschließend $\underline{Q}_2 = \underline{H}_2$ und fülle mit erweiterter mit \underline{E}_m (d.h. erste Zeile und Spalte die von \underline{E}_m)
- Nach $p = \min\{m-1, n\}$ Schritten: $\underline{H}_p \underline{A}^*$ ist obere Dreiecksmatrix \rightarrow Disco, disco, party, party ;)
- Somit ist mit $\underline{Q}^T = \underline{Q}_p \dots \underline{Q}_1$ ist $\underline{Q}^T \underline{A} = \underline{R}$ und $\underline{A} = \underline{Q}\underline{R}$

Anwendungen

Lösen von LGSen mit der QR Zerlegung Bestimme \underline{x} durch Rückwärtssubstitution aus $\underline{R}\underline{x} = \underline{Q}^T \underline{b}$

Anwendung in der linearen Ausgleichsrechnung (Minimierung d. Restes)

Problem: $A^T A \underline{x} = A^T \underline{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$

Lösen der Normalengleichung

- Bestimme eine reduzierte QR-Zerlegung $A = \underline{Q}\underline{R}$ mit $\underline{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\underline{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Löse $\underline{R}\underline{x} = \underline{Q}^T \underline{b}$

$\|\underline{b} - A\underline{x}\|^2 = \|\underline{Q}^T(\underline{b} - A\underline{x})\|^2 = \|\underline{b} - \underline{R}\underline{x}\|^2 + \|\underline{e}\|^2 \geq \|\underline{e}\|^2$

4. Fixpunktiteration

Nullstellenproblem $f(x) = 0$
 Fixpunktproblem $\phi(x) = x$ mit $\phi(x) = g(x)f(x) + x$
 Rekursive Lösung: $x_{i+1} = \phi(x_i)$

Bsp: $x^7 - x - 2 = 0 \quad x = \sqrt[7]{x+2}, x = x^7 - 2$
 MATLAB: `x=;` for `k=1:n`; `x=phi(x)`; end

4.1 Konvergenz von Iterationsverfahren

Falls $(x_k)_k$ mit $x_0 = s$ und $x_{k+1} = \phi(x_k)$ dann ist der Grenzwert von $(x_k)_k$ ein Fixpunkt von ϕ , denn $x = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x_k) = \phi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \phi(x)$
 Fehler $e_k = |x_k - x^*|$
 Lipschitzstetig: $\exists L < \infty : \|f(a) - f(b)\| \leq L \|a - b\|$
Globaler Konvergenzsatz von Banach für $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$
 Falls

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen
- $f(D) \subseteq D$ (Selbstabbildung)
- $\exists L = \sup_{x \in D} \|\phi'(x)\| < 1$ (Kontraktion)

Dann konvergiert $\phi \forall x_0 \in D$ eindeutig gegen x^* und es gilt folgende Fehlerabschätzung:

- A-Priori: $\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\| \leq \epsilon$
- A-posteriori: $\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\|$
- Für Genauigkeit ϵ : $k \geq \ln \left(\frac{\epsilon(1-L)}{\|x_1 - x_0\|} \right) / \ln(L)$

Lokale Konvergenz: $\phi([a, b]) \subseteq [a, b] \wedge \|\phi'([a, b])\| < 1$
Lokale Konvergenz ohne Norm: Falls $\max \lambda_i < 1$ mit λ_i is EW von \underline{J}_ϕ

5. Iterative Näherungsverfahren

Problemstellung

Schreibe $A\underline{x} = \underline{b}$ in ein Fixpunktproblem aus:
 Finde $\underline{A} = \underline{M} - \underline{N}$ mit \underline{M} ist invertierbar. $\Rightarrow (\underline{M} - \underline{N})\underline{x} = \underline{b}$

$\phi(\underline{x}) = \underline{M}^{-1} \underline{N}\underline{x} + \underline{M}^{-1} \underline{b} = \underline{T}\underline{x} + \underline{C}$

Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ konvergent, falls Spektralradius $\rho(\underline{M}^{-1} \underline{N}) < 1$
 Je kleiner der Spektralradius von $\underline{M}^{-1} \underline{N}$ desto bessere Konvergenz.

$A = \underline{M} - \underline{N}$	Systemmatrix
\underline{D}	Diagonalmatrix $\text{diag}(\text{diag}(A))$
\underline{L}	negative linke untere Dreiecksmatrix
\underline{R}	negative rechte obere Dreiecksmatrix

Wichtige Begriffe

Diagonaldominante Matrix: Diagonalelemente sind größer als die restlichen Elemente der selben Zeile: $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ mit $j \neq i$
Spektralradius $\rho(A)$ einer Matrix A : Betragsmäßig größter Eigenwert. Konvergenzbeweis aller Verfahren: Gershgorinkreise um die Null mit $r \leq 1$

5.1 Jacobiverfahren

Konvergiert $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, falls A strikt diagonaldominant.
 $\underline{x}_0 = s \in \mathbb{R}^n \quad \underline{M} = \underline{D} \quad \underline{N} = \underline{L} + \underline{R} = \underline{D} - \underline{A}$

$\underline{x}_{k+1} = \phi(\underline{x}_k) = \underline{D}^{-1} \cdot (\underline{D} - \underline{A}) \cdot \underline{x}_k + \underline{D}^{-1} \underline{b}$

Komponentenweise: $\underline{x}_{k+1} = (a_{ii}^{-1}(b_i - \sum_{j=1, j \neq i} a_{ij} x_{k,j}))_i$

5.2 Gauß-Seidel Verfahren

Unterschied zu Jacobi: Komponentenweise Berechnung von \underline{x} mit bereits iterierten Werten. (Kürzere Iterationszyklen)

Konvergenz: \underline{A} ist strikt diagonaldominant oder \underline{A} ist positiv definit.
Komponentenweise Darstellung:

$$\underline{x}_i^{(k+1)} = a_{ii}^{-1} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Matrixdarstellung:

$$\underline{x}^{(k+1)} = (\underline{D} - \underline{L})^{-1} \cdot (\underline{R}\underline{x}^{(k)} + \underline{b})$$

Mit $\underline{M} = (\underline{D} - \underline{L})$ $\underline{N} = \underline{R}$

5.3 SOR Verfahren

Konvergenz: für $0 < \omega < 2$ und positiv definites \underline{A}

$$\underline{x}_{k+1}^{(neu)} = \omega \underline{x}_{k+1}^{(alt)} + (1 - \omega) \underline{x}_k$$

Bestimme ω so, dass die Konvergenz besser wird: $\omega_{opt} = \frac{2}{2 - \lambda_1 - \lambda_2}$

Matrixdarstellung:

$$\underline{x}_{k+1} = (\underline{1}_n - \omega \underline{D}^{-1} \underline{L})^{-1} ((1 - \omega) \underline{1}_n + \omega \underline{D}^{-1} \underline{R}) \underline{x}_k + \omega (\underline{1}_n - \omega \underline{D}^{-1} \underline{L})^{-1} \underline{D}^{-1} \underline{b}$$

$$\underline{A} = (\frac{1}{\omega} \underline{D} - \underline{L}) - ((\frac{1}{\omega} - 1) \underline{D} + \underline{R})$$

Komponentendarstellung:

$$\underline{x}_i^{k+1} = \omega a_{ii}^{-1} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1 - \omega) x_i^{(k)}$$

6. Nichtlineare Gleichungen

Problemstellung

Gegeben nichtlineare, stetige Funktion
 $f: [a_0, b_0] \rightarrow \mathbb{R}, f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$

6.1 Bisektionsverfahren

Globale, lineare Konvergenz mit $|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2^k} (b_0 - a_0)$

Bisektionsverfahren

- $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$
- $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k$, falls $f(a_k)f(x_k) < 0$
- $a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k$, sonst
- Abbruch falls $|b_k - a_k| < \varepsilon$ oder maxiter erreicht

6.2 Newton-Raphson-Verfahren

Funktion durch Gerade annähern und Nullstelle bestimmen. An dieser Stelle den Vorgang wiederholen. Nur geeignet für einfache Nullstellen.
 \exists Umgebung U mit $f'(x) \neq 0 \forall x \in U$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k - \underline{J}_f^{-1}(\underline{x}_k) \underline{f}(\underline{x}_k) \quad \text{MATLAB: } x = x - \underline{J}_f \backslash f$$

Abbruchkriterium: $\|\underline{x}_k - \underline{x}^*\| \leq \|\Delta \underline{x}\| + c \|\underline{x}_k - \underline{x}^*\|$

6.2.1 Vereinfachtes Newtonverfahren

Man benutzt die Jacobimatrix über mehrerer Iterationen.

Bemerkungen: Es gibt keine Existenz und Eindeutigkeitsaussage zur Lösbarkeit des Nullstellenproblems

$$\underline{J}_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

7. Numerik gewöhnlicher DGL

$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0$ Samples $h = \frac{t-t_0}{n}$
Vorgehen: Finde diskrete Werte $x[t_i]$ anstatt Näherungsfunktion $x = x(t)$

7.1 Einzelschrittverfahren

Def: Man erhält x_{k+1} aus x_k

Eulersches Polygonzugverfahren: $x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k)$

Mittelpunktregel (implizit):

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot f\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}, \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

Implizites Eulerverfahren (rekursiv): $x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_{k+1}, x_{k+1})$

Mit verkleinern der Schrittweite wird die Genauigkeit der Lösung nicht unbedingt besser (Schrittweitensteuerung)

Mehrschrittverfahren: Man erhält x_{k+1} aus x_k, x_{k-1}, \dots, x_1

8. Verfahren zum numerischen Lösen von DGLs

8.1 4 Stufiges Runge-Kutta Verfahren

Einschrittverfahren für AWP's mit variabler Schrittweite.

$$\text{Butcher Schema: } \begin{array}{c|ccc} \underline{c} & \underline{A} & & \\ \hline & \underline{b}^T & & \\ \hline & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n) & k_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} k_2) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} k_1) & k_4 &= f(t_n + h, x_n + h k_3) \end{aligned}$$

$$x_{k+1} = x_k + h \sum b_i k_i = x_k + \frac{h}{6} (k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4)$$

Für andere Stufenzahl(s): $k_i = f(t_n + c_i h, x_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j)$

9. Optimierung

Problemstellung

$f: X \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
Zielfunktion Zulässigkeitsbereich

gesucht: $\min f = \max -f$

$\nabla f(\underline{x}^*) = 0$ und $\underline{H}_f(\underline{x}^*)$ pos. definit. (Numerische Katastrophe)

9.1 Abstiegsverfahren / Gradientenverfahren

Konvergenz: linear

Abstiegsverfahren

- Bestimme Abstiegsrichtung $\underline{v}_k: \nabla f(\underline{x}_k) \underline{v}_k < 0$
- Gradientenverfahren: $\underline{v}_k = -\nabla f(\underline{x}_k)$
- Bestimme Schrittweite $h_k: f(\underline{x}_k + h_k \underline{v}_k) < f(\underline{x}_k)$
- Armijo: $\max h_k \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\}$
- $f(\underline{x}_k + h_k \underline{v}_k) < f(\underline{x}_k) + h_k \gamma \nabla f(\underline{x}_k)^T \underline{v}_k \quad \gamma \in]0, 1[$
- Setze $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + h_k \underline{v}_k$
- Abbruch, falls \underline{x}_k approximativ stationär ist.

9.2 Das lokale Newton-Optimierungsverfahren

Geg: $f \in C^2$, Ges: $\underline{x}^*: \nabla f(\underline{x}^*) = 0$

lokales Newton-Optimierungsverfahren

- Wähle Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$
- Falls $\nabla f(x_k) = 0 \rightarrow$ Stop: Ergebnis x_k
- Bestimme \underline{v}_k durch lösen von $\underline{H}_f(\underline{x}_k) \underline{v}_k = -\nabla f(\underline{x}_k)$
- Setze $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \underline{v}_k$

9.3 Das globale Newton-Optimierungsverfahren

Geg: $f \in C^2$, Ges: $\underline{x}^*: \nabla f(\underline{x}^*) = 0$

globales Newton-Optimierungsverfahren

- Bestimme \underline{v}_k durch lösen von $\underline{H}_f(\underline{x}_k) \underline{v}_k = -\nabla f(\underline{x}_k)$
- Falls $\nabla f(\underline{x}_k)^T \underline{v}_k \ll 0 \rightarrow$ Newtonschritt
- Falls $\nabla f(\underline{x}_k)^T \underline{v}_k \ll 0 \rightarrow$ Gradientenverfahren mit Armijo
- Setze $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \underline{v}_k$
- Abbruch, falls \underline{x}_k approximativ stationär ist.

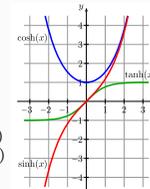
10. Funktionentheorie (Komplexe Funktionen)

10.1 Reelifizierung

$$f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y) \\ \cos(z) &= \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh(z) &= \cos(y) \sinh(x) + i \sin(y) \cosh(x) \\ \cosh(z) &= \cos(y) \cosh(x) + i \sin(y) \sinh(x) \end{aligned}$$



10.2 holomorphe (analytische, reguläre) Funktionen f

Eine Funktion f ist

holomorph	falls f in G komplex differenzierbar ist.
ganz	falls f in ganz \mathbb{C} komplex differenzierbar ist.
konform	falls Kurven Winkel- und Orientierungstreu bleiben.

f ist genau dann holomorph, falls $f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$ und

- u, v sind stetig partiell diffbar
- Cauchy-Riemann DGLs sind erfüllt:

$$\partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y) \quad \partial_y u(x, y) = -\partial_x v(x, y)$$

Holomorph: exp, sin, cosh, Polynome, $f \pm g, fg, \frac{f}{g}, f(g)$

10.3 harmonische Funktionen u, v

u bzw. v sind harmonisch, falls gilt:

$$\Delta u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u = 0 \quad \Delta v = \partial_{xx} v + \partial_{yy} v = 0$$

oder falls $f(z) = u + iv$ holomorph ist; denn mit Satz von Schwarz:

$$\Delta u = \partial_{yx} v - \partial_{xy} v = 0 \quad \Delta v = -\partial_{yx} u + \partial_{xy} u = 0$$

Bestimmung der harmonischen Konjugierten

- geg: harm. Fkt. $u: G \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow u(x, y)$
- ges: harm. Fkt. $v: G \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow v(x, y)$ so, dass $f: G \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
- $v(x, y) = \int u_x \, dy$ mit Integrationskonstante $g(x)$
- $v_x = -u_y \Rightarrow g'(x)$
- $g(x) = \int g'(x) \, dx \Rightarrow v$ bis auf Konstante C bestimmt
- zugehörige holomorphe Fkt. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

10.4 Möbiustransformation $\hat{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Einzigste bijektive, holomorphe, konforme Abbildung von \hat{C} auf sich selbst.

$$f: \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad ad - bc \neq 0$$

$$f^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

10.5 Komplexes Kurvenintegral

für $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow$ stetig diffbar orientierte Kurve.

So brechnet man ein komplexes Kurvenintegral

- Bestimme Parametrisierung von γ
 $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_2, \gamma_i: [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{C}$
- Stelle Integrale auf

$$\int_{\gamma_i} f(z) \, dz = \int_{a_i}^{b_i} f(\gamma_i(t)) \cdot \dot{\gamma}_i(t) \, dt$$

Falls f holomorph: $\int_{\gamma} f(z) \, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

- Berechne die Integrale und addiere:

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = \sum_{i=1}^h \int_{\gamma_i} f(z) \, dz$$

10.6 Cauchy-Integralformel

(falls Unstetigkeitsstelle auf Gebiet G) Falls γ geschl. doppelpunktfreie Kurve in einfach zsh. Gebiet G mit holomorphen Fkt. f , gilt für jedes $z_0 \in G$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz$$

10.7 Integralsatz von Cauchy

Falls keine Unstetigkeitsstelle innerhalb der Kurve γ

$f: G \rightarrow \mathbb{C}$ komplex diffbar auf offenem, einfach zusammenhängendem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. γ sei einfach geschlossene Kurve in G (keine Doppelpunkte).

$$\oint_{\gamma} f(z) \, dz = 0$$

γ

10.8 Singularitäten

Isolierte Singularität $z_0: f: G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ (einzelne Punkte)

Hebbare Sing., falls f auf punktierter Umgebung beschränkt ist.

Pol mter Ordnung: $(z - z_0)^m f(z)$ ist hebbar in z_0

Wesentliche Singularität: Sonst.

10.9 Taylorreihe und Laurentreihe

Taylorreihe: falls f holomorph:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

Laurentreihe: Falls f nicht holomorph ist.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

zerfällt in $\sum_{k=1}^{\infty} d_k w^k$ mit $d_k = c_{-k}$ und $w = \frac{1}{z - z_0}$ (Hauptteil) und

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \text{ (Nebenteil)}$$

Konvergenz falls Hauptteil und Nebenteil konvergiert.

Konvergenzradien: $R = \lim \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \in [0, \infty]$

Residuensatz: $\text{Res}_{z_0} f = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) \, dz$

Allgemeiner Residuensatz G Gebiet: $f: G \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$ hol.

\forall doppelpunktfrei, geschlossene und pos. orientierte Kurven γ mit z_1, \dots, z_n liegen im Inneren von γ :

$$\oint_{\gamma} f(z) \, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z_k} f$$

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z_0} \frac{g}{h} &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} & \text{Res}_{z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} &= \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \\ \text{Res}_{z_0} g \frac{h'}{h} &= mg(z_0) & m &: \text{Ordnung der Polstelle} \end{aligned}$$