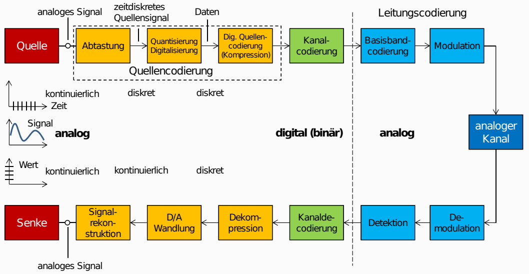
Nachrichtentechnik

Allgemeines

Quelle → Sender → Kanal → Empfänger → Senke



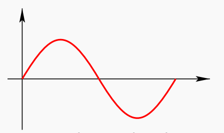
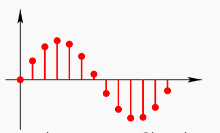
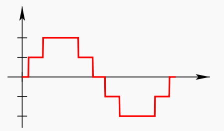
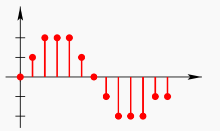
Signal → A/D Wandlung: Abtastung → Digitaler Bitstrom → D/A Wandlung: ±1 Gewichtete NF Impulse $\pm g_S(t)$ → Modulation: Verschiebung ins Trägerband → AWGN Kanal → Detektor → Bitstrom

1. Signale

1.1. Arten von Signalen

deterministisch: durch Funktionen beschreibbar, enthalten kein Nachricht.

stochastisch: zufälliger Verlauf, überträgt Information

	zeitkontinuierlich	zeitdiskret
wertkontinuierlich	 analoges Signal	 abgetastetes Signal
wertdiskret	 quantisiertes Signal	 digitales Signal

Vorteile digitales Signal: Kompression, Verschlüsselung, Fehlerkorrektur

1.2. Sonstiges

Autokorrelation $r_V(\tau) \circ\!\!\overset{\mathcal{F}}{-}\!\!\bullet\, S_V(f)$ Leistungsdichtespektrum

$x(t), y(t)$ sind orthogonal, falls $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) = 0$

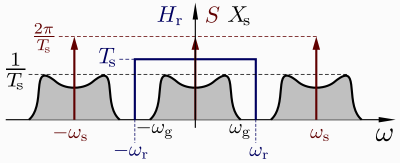
Kompl. Fehlerfunktion $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^{\infty} e^{-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau$

2. Abtastung von Signalen

Abtasttheorem

Signal $x(t)$, Abtastfunktion $s(t) = T_A \sum \delta(t - nT_s)$, Tiefpassfilter $h_r(t)$

Vorgang	Zeitbereich	Frequenzbereich
Abtasten:	$x_s(t) = s(t) \cdot x(t)$	$X_s(\omega) = S(\omega) * X(\omega)$
Rekonstr.	$x_r(t) = h_r(t) * x_s(t)$	$X_r(\omega) = H_r(\omega) \cdot X_s(\omega)$



Bandbreite ω_g, Abtastfrequenz ω_s

$$\boxed{\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_g} \qquad \boxed{\omega_g \leq \omega_r \leq \omega_s - \omega_g}$$

Abtastoperator: $\mathbb{A}\{x(t)\} = x(t) \cdot T_A \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_A)$

Rekonstruktion: $x_r(t) = T_A \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_A) \cdot h_r(t - nT_A)$

Abbruchfehler: $|\Delta| = \left|\frac{x_r(t) - x(t)}{x(t)}\right|$

Periodisierungsoperator: $\mathbb{P}\{X(f)\} = X(f) * \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_A})$

Ideale Abtastung: $\mathbb{A}\{x(t)\} \overset{f_A = 1/T_A}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \mathbb{P}\{X(f)\}$

3. Quantisierung und Digitalisierung

wertkontinuierliche Sequenz von (zeitdiskreten) Abtastwerten wird abgebildet auf wertdiskrete Sequenz.

$$x(nT_A) \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x_Q} x_Q(nT_A)$$

3.1. Allgemeines

Quantisierungsfunktion $\underline{\boldsymbol{x}}_Q = \mathcal{Q}(\underline{\boldsymbol{x}})$

Bildet Vektoren $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^N$ auf eine Menge S ab mit $|S| = M$

Man benötigt $m = \lceil \log_2 M \rceil$ bits um $\underline{\boldsymbol{x}}_Q$ zu repräsentieren.

Intervall $I_i = [g_i, g_{i+1}]$ enthält Reprodwert s_i

Skalare Quantisierer: $N = 1$ Vektor Quantisierer: $N > 1$

Quantisierungsfehler: $\underline{\boldsymbol{q}}(\underline{\boldsymbol{x}}) = \underline{\boldsymbol{x}}_Q - \underline{\boldsymbol{x}} = s_i - x$

(besteht aus granularem Rauschen und Überlastungsrauschen)

3.2. Skalare Quantisierung $N = 1$

m Bits für einen ($N = 1$) Abtastwert

Quantisierungsfehler $q(x) = x_Q - x = x_Q(nT_A) - x(nT_A)$

Quantisierungsfehlerleistung:

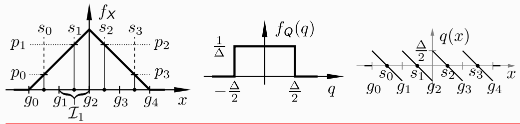
$$P_Q = \int q(x)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{s_i} \int_{g_i}^{g_{i+1}} (s_i - x)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Optimales s_i (setze $\frac{\partial P_Q}{\partial s_i} \overset{!}{=} 0$):

$$s_i = \frac{\int\limits_{g_i}^{g_{i+1}} x f_x(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{g_i}^{g_{i+1}} f_x(x)\,\mathrm{d}x} = \mathsf{E}\left[X \,|x \in I_i\right]$$

3.3. Lineare Quantisierung

Spezialfall der skalaren Quantisierung mit gleich großen Quantisierungsintervallen Δ.



$$\boxed{\text{Es gilt für PDF: } \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \overset{!}{=} 1}$$

Gleich große Quantisierungsintervalle $\mathcal{I}_i = [g_i, g_{i+1}]$ mit Breite Δ

$\Delta = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2^m} = g_{i+1} - g_i$

Reproduktionswerte s_i in der Mitte der Intervalle (midriser)

$s_i = \frac{2i - M + 1}{2}\Delta$

Auftrittswahrscheinlichkeit p_i der Quantisierungsstufe s_i

$p_i = \int_{g_i}^{g_{i+1}} f_X(x)\,\mathrm{d}x$

$$\boxed{\text{Signalleistung } P_X = \mathsf{E}[X^2] = \int\limits_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

Gleichverteilung: $P_X = \frac{x_{\max}^2}{3}$ Sinusförmig: $P_S = \frac{x_{\max}^2}{2}$

$$\boxed{\text{Fehlerleistung } P_Q = \mathsf{E}[Q^2] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} q(x)^2 f_Q(q)\,\mathrm{d}q}$$

Bei gleichverteiltem Quantisierungsfehler: $P_Q = \frac{\Delta^2}{12}$

$$\boxed{\text{Signal-Noise-Ratio: } \mathrm{SNR}_Q = \frac{P_X}{P_Q}}$$

$$\mathrm{SNR}_Q = \frac{P_X}{P_Q} = \begin{cases} \frac{x_{\max}^2/3}{\Delta^2/12} = 2^{2m} & \text{bei gleichverteiltem Signal} \\ \frac{x_{\max}^2/2}{\Delta^2/12} = \frac{3}{2}2^{2m} & \text{bei sinusförmigem Signal} \end{cases}$$

Signal zu Quantisierungsrauschabstand $\mathrm{SNR}_{Q\mathrm{dB}}$

$\mathrm{SNR}_{Q\mathrm{dB}} = 10\log_{10}(\mathrm{SNR}_Q)\mathrm{dB} = m \cdot 6\,\mathrm{dB}$

(CD, $16\,\mathrm{bit} : 96\,\mathrm{dB}$)

3.4. Nichtlineare Quantisierung

A-law-Kennlinie (Europa) und μ-law-Kennlinie (USA)

$$C(x) = \begin{cases} \frac{A}{1+\ln(A)} \cdot |x| \cdot \operatorname{sgn}(x) & 0 \leq |x| \leq \frac{x_{\max}}{A} \\ \frac{1+\ln\left(\frac{A\cdot|x|}{x_{\max}}\right)}{1+\ln(A)} \cdot |x| \cdot \operatorname{sgn}(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

$A = 87.5 = 24\,\mathrm{dB}$

3.4.1. Pulse Coded Modulation PCM

Abtastung + skalare Quantisierung: $\mathrm{SNR}_Q = \frac{P_X}{P_Q} = 2^{2m}$

3.4.2. Differentielle PCM (DPCM)

Differenz zu vorhergesagtem Wert wird quantisiert.

Prädiktion 0.ter Ordnung: Kann bei schnellen, großen Änderungen nicht mehr folgen. Gut geeignet für Signale mit hoher zeitlicher Konzentration → schmales Spektrum.

3.4.3. Delta-Modulation (Hohe Überabtastung)

1-Bit-Quantisierung: $e_Q(nT_S) = \pm\Delta$

Kann den Wert nicht Konstant halten, Tiefpass am Empfänger nötig

3.4.4. Sigma-Delta-Modulator

$\sum$: Summe/Integral Δ: 1-bit-Quantisierer

3.5. Optimale skalare Quantisierung

Lloyd-Max-Algorithmus

- Wähle Startwerte für alle $s_i^{(0)}$
- Intervallgrenzen: $g_i^{(t+1)} = \frac{s_i^{(t)} + s_{i-1}^{(t)}}{2}$ $\quad i = 1, \dots, M-1$
- Reprod. Werte: $s_i^{(t+1)} = \mathsf{E}[X \mid X \in I_i]$ $\quad i = 0, \dots, M-1$
- Fehlerleistung $P_Q^{(t+1)} = \mathsf{E}[Q^2]$ mit $s_i^{(t+1)}$ und $g_i^{(t+1)}$
- Berechne relative Änderung $\delta^{(t)} = \frac{P_Q^{(t+1)} - P_Q^{(t)}}{P_Q^{(t)}}$

3.6. Informationsgehalt und Entropie

Info vom Symbol s_i: $I_i = -\log_2 \mathsf{P}(X_Q = s_i) = -\log_2 p_i$

Entropie von X_Q: $H(X_Q) = \mathsf{E}[I] = -\sum\limits_{i=0}^{M-1} p_i \log_2 p_i \left[\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{Symbol}}\right]$

Mittlere Codewortlänge $\bar{l} = \mathsf{E}[l] = \sum\limits_{i=0}^{n-1} p_i l_i$

Die minimale mittlere Codewortlänge $\bar{l} \geq H(x_Q)$

4. Codierung

Komprimierung: Falls Bitstrom nicht gleichverteilt und mit Gedächtnis

Maximale Kompression: Bits gleichverteilt, ohne Gedächtnis

Entropie: kein Code kann für Z eine geringere mittlere Codewortlänge finden als $H(z) = \sum \mathsf{P}(z) \operatorname{ld}\left(\frac{1}{\mathsf{P}(z)}\right)$

4.1. Kompression

Kleiner Verlust bei unkodierten Bitstrom. Großer Gewinn bei Kodierung.

Bsp: Feste Blocklänge mit Statusbit am Anfang: Kodiert/Unkodiert

4.2. Digitale Quellencodierung (Kompression)

Verfahren zum Kodieren:

Verteilung Bekannt: Huffman Code, Morse, Arithmetic

Universal: Lempel-Ziv (ZIP), PPM, BWT(bZip)

Transform: Fouriertransformation (JPG,GIF,PNG,MP3)

4.3. Kanalcodierung

Single-Parity-Check: 1 Bit pro 2 bit zusätzlich: XOR(x_1, x_2)

Daraus ergibt sich eine Effizienz von $\frac{2}{3}$

FEC: Forward Error Correction liefert Fehlererkennung und Korrektur.

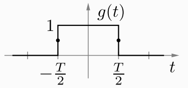
Beispiele: Paritätsbit, CRC, Reed-Solomon-Codes, LDPC, Polar Codes

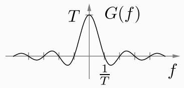
5. Basisbandübertragung

5.1. Impulsformen

5.1.1. Rechteckimpuls $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$:

$$g_{\mathsf{NRZ}}(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } |t| < \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2}, & \text{für } |t| = \frac{T}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad G_{\mathsf{NRZ}}(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

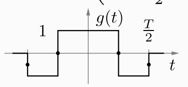


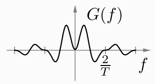


5.1.2. Manchester Impuls:

$$g(t) = -g_{\mathsf{NRZ}}(t) + 2g_{\mathsf{NRZ}}(2t) = \begin{cases} 1, & \text{für } |t| < \frac{T}{4} \\ 0, & \text{für } |t| = \frac{T}{4} \\ -1, & \text{für } \frac{T}{4} < |t| < \frac{T}{2} \\ -\frac{1}{2}, & \text{für } |t| = \frac{T}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$G(f) = T\left(\frac{\sin(\pi f \frac{T}{2})}{\pi f \frac{T}{2}} - \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right)$$



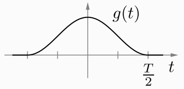


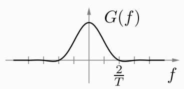
Mittelwert Null, kein Gleichanteil

5.1.3. $\cos^2$-Impuls:

$$g(t) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right), & \text{für } |t| < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

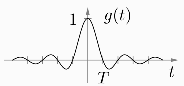
$$G(f) = \frac{T}{2}\frac{\cos(\pi f \frac{T}{2})}{1-(fT)^2}\frac{\sin(\pi f \frac{T}{2})}{\pi f \frac{T}{2}}$$

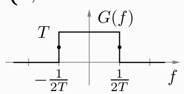




5.1.4. sinc-Impuls: $\mathrm{sinc}(x) = \mathrm{si}(\pi x)$

$$g(t) = \frac{\sin(\pi \frac{t}{T})}{\pi \frac{t}{T}} = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \qquad G(f) = \begin{cases} T, & \text{für } |f| < \frac{1}{2T} \\ \frac{T}{2}, & \text{für } |f| = \frac{1}{2T} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

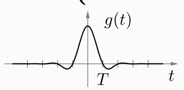


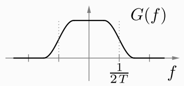


5.1.5. „Nyquist roll-off"-Impuls:

$$g(t) = \frac{\sin(\pi \frac{t}{T})}{\pi \frac{t}{T}} \cdot \frac{\cos(\alpha\pi \frac{t}{T})}{1-4\alpha^2(\frac{t}{T})^2}$$

$$G(f) = \begin{cases} T & \text{für } |f| \le \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2}[1+\cos(\frac{\pi T}{\alpha}(|f| - \frac{1-\alpha}{2T}))] & \text{für } \frac{1-\alpha}{2T} < |f| \le \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$





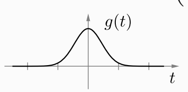
5.1.6. Root-Raised-Cosine:

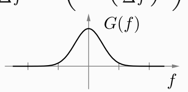
Meist genutzer Filter (Wurzel-Nyquist)

5.1.7. Gauß-Impuls:

$$g(t) = \exp\left[-\pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2\right]$$

$$G(f) = \Delta t \cdot \exp\left(-\pi\,(\Delta t f)^2\right) = \frac{1}{\Delta f}\exp\left(-\pi\left(\frac{f}{\Delta f}\right)^2\right)$$





5.2. Energie wichtiger Impulse mit Amplitude A

$E_S\{\mathrm{rect}(\frac{t}{\alpha T})\} = A^2\alpha\,|T|$ $\qquad E_S\{\mathrm{tri}(\frac{t}{\alpha T})\} = \frac{2}{3}\alpha\,|T|\,A^2$

$E_S\{\mathrm{sinc}(\frac{t}{\alpha T})\} = A^2\,|\alpha|\,|T|$ $\qquad$ Rampe 0 bis αT: $\frac{\alpha}{3}\,|T|\,A^2$

5.3. Bandbreite

Absolut: Alle positiven Frequenzen

B_{99} Bandbreite: 99% der Signalenergie bzw. -leistung liegen in diesem Bandbreitenbereich (geht auch mit 90%)

$\mathrm{B}_{6\mathrm{dB}}$ Bandbreite: Bis Hälfte des Spektrums $G(f)$

$\mathrm{B}_{3\mathrm{dB}}$ Bandbreite: Bis Hälfte der Leistung

B_N Äquivalente Rauschbandbreite

Bandbreiteneffizienz (Effizienz des Modulationsverfahrens):

$\eta = \frac{\text{Übertragungsrate}}{\text{NF Bandbreite}}$ $\qquad [\eta] = \frac{\mathrm{bit/s}}{\mathrm{Hz}}$

Beispiel GSM: $\eta = 0.88\frac{\mathrm{bit/s}}{\mathrm{Hz}}$, $\quad$ LTE: $\eta = \frac{3\mathrm{Gbit/s}}{100\mathrm{MHz}} = 30\frac{\mathrm{bit/s}}{\mathrm{Hz}}$

5.4. Frequenz-Zeit-Unschärfe

> Ein Signal kann nicht gleichzeitig hart Band- und Zeitbegrenzt sein!
> **Unschärfe:** $T_D \cdot B_0 \ge \frac{1}{4\pi}$

Nach Trägheitsradius definiert. (Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 g_s^2\,\mathrm{d}t$ konvergiert)

Schrankenfunktion für Spektrum:

Falls das Zeitsignal in der n-ten Ableitung das *erste* mal einen Sprung aufweist, gilt für das Betragsspektrum:

$$|X(f)| \propto \frac{1}{|f|^{n+1}} \qquad \text{für große } |f|$$

Anmerkung: n kann auch negativ sein! Bsp: $\delta(t) \Rightarrow n = -1$

5.5. Nyquist Bedingungen

5.5.1. 1. Bedingung: Kein Symbolüberspechen

$$\text{Impulsantwort } g[nT] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \ne 0 \end{cases}$$

Fordert maximale vertikale Öffnung des Auges

Impuls Nullstellen: $\pm 1T, \pm 2T, \pm 3T, \ldots$

Zeitbereich: $A\{g(t)\} = T\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} g(nT)\cdot\delta(t-nT) = T\cdot\delta(t)$

Frequenzbereich: $P\{G(f)\} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} G(f - \frac{k}{T}) = T$

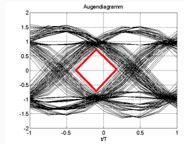
5.5.2. 2. Bedingung: Verschärfung 1. Bedingung

$$\text{Impulsantwort } g\left[k\frac{T}{2}\right] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ g\left[\frac{T}{2}\right] & k = \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Fordert maximale horizontale Öffnung des Auges

Zusätzliche Impuls Nullstellen: $\pm 1.5T, \pm 2.5T, \pm 3.5T, \ldots$

5.6. Augendiagramm



Bestimmung des Augendiagramm (4 Durchläufe): Für die Bereiche $[-T_\mathsf{A}, 0]$ und $[0, T_\mathsf{A}]$ werden die relevanten Pulse so überlagert(positiv oder negativ), dass das Auge minimal wird. Daraus ergibt sich die Überlagerungstabelle.

Beispiel mit 1 Vor- und 2 Nachläufern:

D_{-2}	D_{-1}	D_1	$\boldsymbol{D_{-1}}$	$\boldsymbol{D_1}$	$\boldsymbol{D_2}$
+1	−1	−1	−1	−1	+1
−1	+1	+1	+1	+1	−1

Vertikale Öffnung A_v: Maß für Empfindlichkeit gegenüber Rauschen

Horizontale Öffnung A_h: Maß für Empfindlichkeit gegenüber Schwankungen des Abtastzeitpunkts

5.7. Korrelation

Ein Maß für die Ähnlichkeit zweier Signale $x(t), y(t)$ bei Verschiebung.

Korrelationskoeffizient $\rho_{xy} = \frac{E_{xy}}{\sqrt{E_x \cdot E_y}} = \frac{\varphi_{xy}(0)}{\sqrt{\varphi_x(0)\cdot\varphi_y(0)}}$

Es gilt: Korreliert $\rho = 1$, Orthogonal $\rho = 0$, Antipodisch $\rho = -1$

Kreuzkorrelationsfkt. zwischen zueinander verschobenen Signalen:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_{yx}(-\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot y(t+\tau)\,\mathrm{d}t$$

Zusammenhang mit Faltung: $\varphi_{xy}(\tau) = x(-t) * y(t)|_{t=\tau}$

Autokorrelationsfkt. AKF ist Kreuzkorrelation mit sich selbst ($y = x$):

$\varphi_x(\tau) = \varphi_{xx}(\tau)$ $\qquad$ Anwendung: Erkennen von Perioden

Energiebeziehung: $E_{x,y} = \rho_{x,y}\sqrt{E_x E_y}$ mit

Energie $E_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)^2\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_x\,\mathrm{d}f = \varphi_{xx}(0)$ $\qquad$ (endl. Sig.)

Leistung $P_x = \mathsf{E}[X^2] = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} x(t)^2\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ (period. Sig.)

Leistungsdichtespektrum $\Phi_x(f)$ ist definiert als $\varphi_x \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \Phi(f)$

Periodische Signale: $\overline{\varphi}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)\,\mathrm{d}t$

Stochastische Signale: $\varphi_{X\,Y}(\tau) = \mathsf{E}[X(t)\cdot Y(t+\tau)]$

$\rho_{X,Y} = \frac{\mathsf{Cov}[X\,Y]}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_X(f)\,\mathrm{d}f = \varphi_X(0) = \mathsf{Var}[X] + \mathsf{E}[X]^2 = \sigma_X^2 + \mu_X^2$

6. Analoger Übertragungskanal

$r(t) = h(t) * s(t) \qquad R(f) = H(f)\cdot S(f)$

Verzerrungsfrei: $h(t) = h_0\,\delta(t - t_0) \qquad H(f) = h_0 e^{-\mathrm{i}2\pi f t_0}$

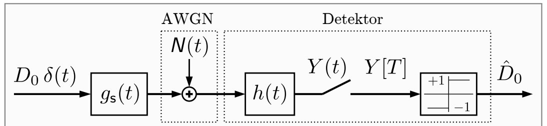
6.1. AWGN – Additive White Gaussian Noise

Weißes Rauschen N enthält alle Frequenzen. Thermisch: $N_0 = k_\mathrm{B}T$

PDF	$f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}$	
LDS:	$\Phi_N(f) := \frac{N_0}{2}$	für $f < 10\,\mathrm{GHz}$
AKF:	$\varphi_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$	$\Rightarrow 0$ für $\tau \ne 0$
Leistung	$P_N = \int\Phi_N\,\mathrm{d}f = \sigma^2 = B\cdot N_0$	

Äquivalente Rauschbandbreite B_N: Bandbreite eines idealen Tiefpasses, der die selbe Rauschleistung P_N erzeugt, wie das reale Tiefpassfiltersystem.

7. Detektion im Rauschen



gewähltes Bit $\hat{D}_n$ eines tatsächlichen Bits $D_n = \{1, 0\}$

Ziel: $\mathsf{P}(\hat{D}_n \ne D_n)$ soll minimal sein.

Lösung: maximiere SNR zum Abtastzeitpunkt nT

Rauschleistung nach Filterung mit $h(t)$:

$P_N = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi_N\,|H(f)|^2\,\mathrm{d}f = \frac{N_0}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\,\mathrm{d}f$

$\to$ mit Satz von Parseval gilt : $P_\mathsf{N} = \frac{N_0}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|h(t)|^2\,\mathrm{d}t$

momentane Signalleistung: $P_s(t) = |y_s(t)|^2$

mittlere Signalleistung: $P_s = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|y_s(t)|^2\,\mathrm{d}t$

7.1. Matched Filter

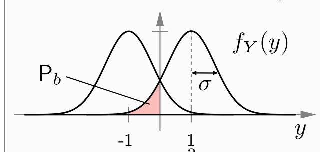
Signalangepasster Filter damit Signal im AWGN Kanal zum Abtastzeitpunkt die maximale SNR hat. Impulsantwort des Matched Filters:

$h_{\mathsf{MF}}(t) = K\cdot\boldsymbol{g}_s^*(T - t)$ $\qquad$ (entspricht gewendetem Sendeimpuls)

$H_{\mathsf{MF}}(f) = K\cdot\boldsymbol{G}_s^*(f)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f T}$

Maximum SNR: $\frac{P_s}{P_N} = \frac{2E_s}{N_0}$

7.2. Fehlerwahrscheinlichkeit P_b



$\mathsf{P}_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{z_0}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}}\,\mathrm{d}z = Q(z_0) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{SNR}}\right)$

Substituiere z_0

Für matched Filter: $\mathsf{P}_b = Q(\sqrt{P_s/P_n}) = Q(\sqrt{Y_s^2/\sigma_N^2}) = Q(\sqrt{2E_s/N_0}) = Q(\sqrt{\mathrm{SNR}})$

7.3. Zeitdiskreter AWGN-Kanal

$\sigma^2 = \frac{\sigma_N^2}{A^2} = \frac{N_0}{2E_s} = \frac{1}{\mathrm{SNR}}$

7.4. Unabhängiges (unkorreliertes) Rauschen

Falls die erste Nyquistbedingung erfüllt und maximale SNR:

$\Rightarrow$ Die Folge abgetasteter Rauschanteile ist unabhängig!

8. Lineare, digitale Modulation

8.1. Allgemeines

Dimensionen: Phase (sin/cos), Polarisation (hori/vert)
Die meisten Medien übertragen um eine Trägerfrequenz f_0 (Bandpass)

Bandpass-Sendesignal (moduliert mit $S(t)$):
$\tilde{S}(t) = A(t)\sqrt{2}\cos\left(2\pi(f_0 + F(t))t + \varphi_0(t)\right)$

Inphasenanteil (Cosinusträger) $S_I(t) = A(t)\cos(\varphi'(t))$
Quadraturanteil (Sinusträger) $S_Q(t) = A(t)\sin(\varphi'(t))$
Amplitude: $|A(t)| = \sqrt{S_I^2(t) + S_Q^2(t)}$

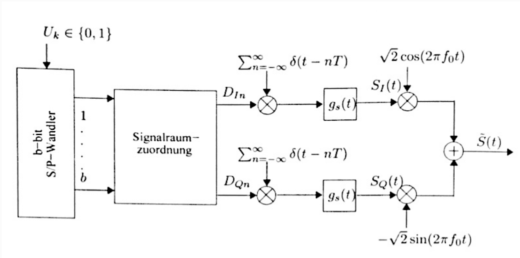
Phase: $\varphi'(t) = \arctan\frac{S_Q(t)}{S_I(t)}$

Mittl. Energie pro Symbol: $\overline{E}_S = \mathsf{E}[D_{I_n}^2 + D_{Q_n}^2] \cdot \underbrace{\int_0^T |g_s(t)|^2 \,\mathrm{d}t}_{E_{g_s}}$

Energie je Bit : $E_{\text{bit}} = \frac{\overline{E}_S}{\#\ \text{Bits}}$

Anfälligkeit gegenüber Rauschen: d_{min}

8.2. Modulation und Signalraumzuordnung



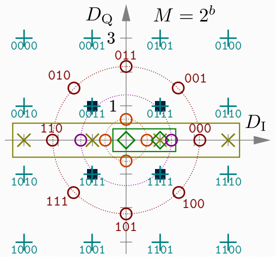
Moduliertes Sendesignal
$\tilde{S}(t) = S_I(t)\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t) - S_Q(t)\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)$

$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{I_n} g_s(t - nT)\right]\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t)$$

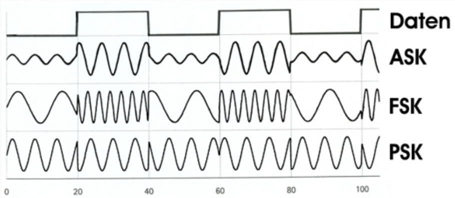
$$- \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{Q_n} g_s(t - nT)\right]\sqrt{2}\sin(2\pi f_0 t)$$

8.3. Modulationsarten

linear: AM $A(t)$, ASK, PSK
nicht linear: FM $F(t)$, PM $\varphi(t)$, FSK
Probleme: Nichtlineare Verstärker verzerren Raumpunkte



Modulation:	b	$\mathsf{E}[D_I^2 + D_Q^2]$
OOK	1	0.5
4ASK	2	5
4QAM/QPSK	2	2
16QAM	4	10
BPSK/2ASK	1	r_1^2
QPSK	2	r_2^2
8PSK	3	r_3^2



8.4. On-Off Keying (OOK)

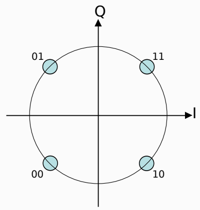
Intensitätsmodulation mit $b = 1$ (Laser an oder aus)

Mittlere Energie pro Symbol: $E_s = \frac{A_{\text{on}}^2}{2}$

8.5. Amplitude Shift Keying (M-ASK)

Für M Stufen mit Abstand Δ gilt: $\mathsf{E}[D_I^2] = \frac{\Delta^2(M^2-1)}{12}$

8.6. Phase Shift Keying (PSK)



$d_I^2 + d_Q^2 = r^2$ (meist $r = 1$)
$E_s = \mathsf{E}[D_I^2 + D_Q^2]\int_0^T |g_s(t)|^2 \,\mathrm{d}t$

Offset: verhindert harte Übergänge (Nicht durch Null)
Gray-Codierung zwischen benachbarten Symbolen: Fehler in der Symbolerkennung hat nur geringe Bitfehler

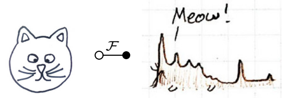
8.6.1. DPSK

Differentielle binäre Phasenmodulation
0: Phase bleibt gleich, 1: Phase ändert sich

8.7. Quadraturamplitudenmodulation (M-QAM)

Für M Stufen und Abstand Δ: $\mathsf{E}[D_I^2 + D_Q^2] = \frac{\Delta^2(M-1)}{6}$

Auch wichtig:

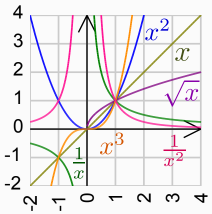


Eigene Notizen:

Anhang

9. Mathematik

9.1. Polynome $P(x) \in \mathbb{R}[x]_n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ vom Grad n



Gerade durch Punkt $P(x_0, y_0)$:
$y = m(x - x_0) + y_0$

Quadratisch: $y = ax^2 + bx + c$
Mitternachtsformel für Nullstellen:

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

9.2. Exponentialfunktion und Logarithmus

$a^x = e^{x \ln a}$ $\quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ $\quad \ln x \le x - 1$

$\ln(x^a) = a \ln(x)$ $\quad \ln(\frac{x}{a}) = \ln x - \ln a$ $\quad \log(1) = 0$

9.3. Sinus, Cosinus $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

x / φ	0 / $0°$	$\pi/6$ / $30°$	$\pi/4$ / $45°$	$\pi/3$ / $60°$	$\frac{1}{2}\pi$ / $90°$	π / $180°$	$1\frac{1}{2}\pi$ / $270°$	2π / $360°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	0

Additionstheoreme
$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
$\sin(x) = \tan(x)\cos(x)$

Stammfunktionen
$\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x) + x\sin(x)$
$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) - x\cos(x)$
$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x - \sin(x)\cos(x)\right)$
$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x + \sin(x)\cos(x)\right)$
$\int \cos(x)\sin(x) = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$

$\sin(x \pm y) = \sin x\ \cos y \pm \sin y\ \cos x$ $\quad \sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x})$
$\cos(x \pm y) = \cos x\ \cos y \mp \sin x\ \sin y$ $\quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x})$

9.4. Integralgarten

Partielle Integration: $\int uw' = uw - \int u'w$
Substitution: $\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t$

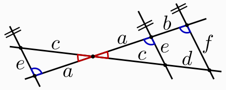
$F(x) - C$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1}x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x\ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{a}{x}$
$\frac{1}{a^2}e^{ax}(ax - 1)$	$x \cdot e^{ax}$	$e^{ax}(ax + 1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\mathrm{Si}(x)$	$\mathrm{sinc}(x)$	$\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

$\int e^{at}\sin(bt)\,\mathrm{d}t = e^{at}\frac{a\sin(bt) + b\cos(bt)}{a^2 + b^2}$

$\int xe^{ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}e^{ax^2}$ $\qquad \int t^2 e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{(ax-1)^2 + 1}{a^3}e^{at}$

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^{16}
2	4	8	16	32	64	128	256	65536

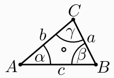
10. Geometrie $\quad a^2 + b^2 = c^2$



Strahlensatz:
$a : b = c : d \qquad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}$

Innenwinkelsumme im n-Eck: $(n-2)\cdot 180°$

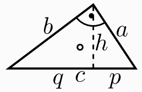
Allg. Dreieck $\triangle ABC$ mit Seiten a, b, c und Winkel α, β, γ:



Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$
Sinussatz: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$
Projektionssatz: $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$

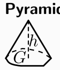
Höhe $h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha$ $\qquad$ Fläche $A = \frac{1}{2}h_c c = \frac{1}{2}h_a a$
Schwerpunkt: $x_S = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \quad y_S = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$

Rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit $\gamma = 90°$ bei C



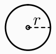
Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
Höhensatz: $h^2 = pq$
Kathetensatz: $a^2 = pc$
$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\tan\alpha$

Pyramide mit beliebiger Grundfläche G



$V = \frac{1}{3}G \cdot h$
SP: liegt auf h mit $y_S = h/4$

Zylinder/Prisma
$V = G \cdot h$
$M = U \cdot h$



Kreis: $A = \pi r^2 \qquad U = 2\pi r$
Kugel: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad O = 4\pi r^2$
Kreissehne: $s = 2r\sin(\alpha/2)$

11. Stochastik

11.1. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbf{P})$

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ besteht aus

Ergebnismenge	$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$	Ergebnis $\omega_j \in \Omega$
Ereignisalgebra	$\mathbb{F} = \{A_1, A_2, \ldots\}$	Ereignis $A_i \subseteq \Omega$
Wahrscheinlichkeitsmaß	$\mathrm{P} : \mathbb{F} \to [0, 1]$	$\mathrm{P}(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert\Omega\rvert}$

Es gilt: $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit für A falls B bereits eingetreten ist:
$\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$
Multiplikationssatz: $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)$

Erwartungswert: $\mathrm{E}[X] = \mu = \sum x_i P(x_i) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$

Varianz: $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\left[(X - \mathrm{E}[X])^2\right] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$
Standard Abweichung $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$

Covarianz: $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])] = \mathrm{Cov}[Y, X]$

Binominalverteilung (diskret, n Versuche, k Treffer):
$P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad \mu = np \qquad \sigma^2 = np(1-p)$

Korrelation ist ein Maß für den linearen Zusammenhang von Variablen

Kreuzkorrelation von X und Y: $\boxed{r_{xy} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}}$

11.2. Normalverteilung

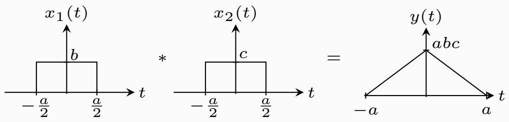
PDF: $\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}}$

$\mathrm{E}(X) = \mu$	$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$	$\varphi_X(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$
Erwartungswert	Varianz	Charakt. Funktion

12. Signale

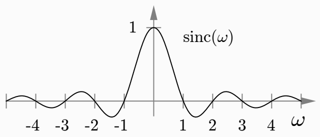
12.1. Faltung von Signalen

$$\boxed{x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau}$$



$\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right) * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right) = T_A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_A}\right)$

12.2. sinc-Singal



$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
$= \mathrm{si}(\pi x)$

FT:
$\mathrm{sinc}(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathrm{rect}(f)$

13. Fouriertransformation

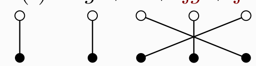
$$\boxed{\underset{\text{Zeitbereich}}{x(t)} \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; \underset{\text{Frequenzspektrum}}{X(f)} := \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-\mathrm{j}2\pi f t)\,\mathrm{d}t}$$

13.1. Eigenschaften der Fouriertrafo

Linearität:	$\alpha x(t) + \beta g(t) \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; \alpha X(f) + \beta G(f)$
Zeitverschiebung:	$x(t - \tau) \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; e^{-\mathrm{j}2\pi f\tau}X(f)$
Frequenzversch.	$e^{\mathrm{j}2\pi f_0 t} \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; X(f - f_0)$
Vertauschung:	$U^*(t) \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; u^*(f)$
Stauchung	$x(ct) \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; \frac{1}{\lvert c\rvert}X(\frac{f}{c})$
Ableitung	$x^{(n)}(t) \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; (\mathrm{j}2\pi f)^n X(f)$
Integral	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; \left(\frac{1}{2}\delta(f) - \frac{\mathrm{j}}{2\pi f}\right)X(f)$
Faltung:	$(x * g)(t) \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; X(f) \cdot G(f)$
Parseval:	$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) \cdot u_2^*(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} U_1(f) \cdot U_2^*(f)\,\mathrm{d}f$
Energie:	$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert u(t)\rvert^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert U(f)\rvert^2\,\mathrm{d}f$

Zusammenhang zwischen geraden und ungeraden Signalanteilen:

$$x(t) = g + u + \mathrm{j}g + \mathrm{j}u$$

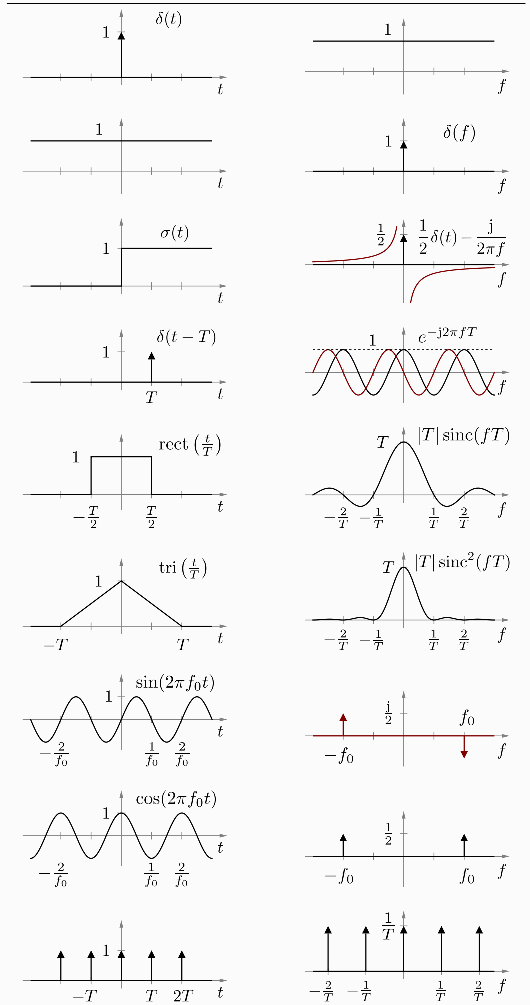


$$X(f) = G + U + \mathrm{j}G + \mathrm{j}U$$

$x(t) \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; X(f) \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; x(-t) \;\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}\; X(-f)$
Bei periodischen Signalen: Fourierreihen!

13.2. Wichtige Fouriertransformationen

Zeitfunktion $\qquad$ Spektrum



13.3. Weitere Paare

$f(t)$	$F(\omega)$	$f(t)$	$F(\omega)$
$\lvert t^n\rvert$	$\frac{2n!}{(\mathrm{i}\omega)^{n+1}}$	$\mathrm{sinc}(\frac{t}{T})$	$T\,\mathrm{rect}(fT)$
t^n	$2\pi\mathrm{i}^n\delta^{(n)}(\omega)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+\mathrm{i}\omega)^n}$
		$\exp(-\alpha t)$	$\frac{1}{\mathrm{i}2\pi f + \alpha}$