

*Hinweis:* Im Modul Signaldarstellung ist keine Formelsammlung im üblichen Sinn zugelassen. Deshalb ist dies nur eine Sammlung von Informationen, die auf den freien Seiten im Manuskript Platz finden können.

## 1. Additionstheoreme

**1.1. sinh, cosh**  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$      $\operatorname{arsinh} x := \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$   
 $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$      $\operatorname{arcosh} x := \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

**Additionstheoreme**    **Stammfunktionen**  
 $\cosh x + \sinh x = e^x$      $\int \sinh x dx = \cosh x + C$   
 $\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$      $\int \cosh x dx = \sinh x + C$   
 $\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$

**1.2. sin, cos**  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$	0	$-\infty$	0

**Additionstheoreme**    **Stammfunktionen**  
 $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$      $\int x \cos(x) dx = \cos(x) + x \sin(x)$   
 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$      $\int x \sin(x) dx = \sin(x) - x \cos(x)$   
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$      $\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x))$   
 $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$      $\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x))$   
 $\sin(x) = \tan(x) \cos(x)$      $\int \cos(x) \sin(x) dx = -\frac{1}{2} \cos^2(x)$

$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$      $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

## 2. Signaldarstellung

### 2.1. Signale & Systeme

Allgemeine Form:  $x_i(t) = \underbrace{g}_{\textcircled{3}} \cdot \underbrace{[s \cdot t + v]}_{\textcircled{2}} + \underbrace{r}_{\textcircled{4}}$

- $\textcircled{1}$ : Translation  $\rightleftarrows$
- $\textcircled{2}$ : Skalierung  $\longleftrightarrow$
- $\textcircled{3}$ : Gewichtung  $\updownarrow$
- $\textcircled{4}$ : Verschiebung  $\downarrow\uparrow$

## 2.2. Analytische Darstellung, Stochastische Darstellung

Zeitkontinuierliches Signal  $x(t)$  und diskretes Signal  $x[n]$

### 2.2.1 Besondere Grundfunktionen

**Einheitsimpuls**  $\delta[n - n_0] = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$

**Zeitdiskreter Einheitsprung**  $u[n - n_0] = \begin{cases} 1, & n \geq n_0 \\ 0, & n < n_0 \end{cases}$

oder  $u[n] = \sum_{l=0}^{\infty} \delta[n - l]$

**Diracsche  $\delta$ -Funktion**

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$  und  $\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega t} \delta(t) dt = 1$  und  $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\omega t} d\omega$

**Zeitkontinuierlicher Einheitsprung**  $u(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$

Es gilt:  $u(t - t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau$

## 2.3. LTI-Systeme

Alle Angaben gelten gleichermaßen für zeitdiskrete Signale.

i. Allg. lin. DGL:  $a_0 y + a_1 \dot{y} + a_2 \ddot{y} + \dots = b_0 x + b_1 \dot{x} + b_2 \ddot{x} + \dots$

$y(t) = \overline{T}\{x(t)\}$

**linear**    **Input**    **Output**  
 $a x_1(t) + b x_2(t) \Rightarrow a y_1(t) + b y_2(t)$   
**zeitinvariant**  $x(t - t_0) \Rightarrow y(t - t_0)$

Sprungantwort  $s(t)$  auf  $x(t) = u(t)$

Impulsantwort  $h(t) = \dot{s}(t)$  auf  $x(t) = \delta(t)$

Lösungsmöglichkeiten:

1. Lösen der DGL
2. Faltungsintegral

### Faltung mit Folie

Gebrauchte Hilfsmittel: Klarsichtfolie, Folienstift

$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\tau)}_{\textcircled{1}} \underbrace{h(t - \tau)}_{\textcircled{2}} d\tau$

1.  $\textcircled{2}$  auf Folie übertragen
2.  $t$  im Ursprung
3. Folie nach links drehen
4. Beschriften:  $h(t - \tau) \begin{cases} \text{rechts von } t: t + \dots \\ \text{links von } t: t - \dots \end{cases}$
5. Folie über  $\textcircled{1}$  schieben
6. Keine Überlappung  $\Rightarrow y = 0$
7. Integration in stetige Bereiche aufteilen
8. Grenzen bestimmen
9.  $\textcircled{1}$  abschnittsweise analytisch beschreiben
10.  $\textcircled{2}$  abschnittsweise analytisch beschreiben
11. Teilintegrale lösen

## 2.4. Faltung von Funktionen

Kontinuierlich:  $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$

Diskret:  $(f * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n - k]$

**Eigenschaften der Faltungsintegrale(-summen)**

Gültigkeit gleichermaßen für diskrete Signale

**Kommutativität**  $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

**Assoziativität**  $f(t) * (g(t) * h(t)) = (f(t) * g(t)) * h(t)$   
 (Serienschaltung)

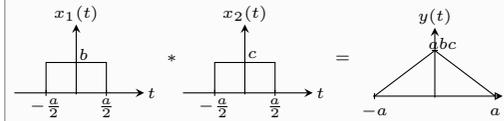
**Distributivität**  $f(t) * (g(t) + h(t)) = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$   
 (Parallelschaltung)

**Faltung mit Dirac**  $x(t) * \delta(t - b) = x(t - b)$   
 (Gleiches Signal verschoben)

**Stabilität**  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$   
 $\sum_{l=-\infty}^{\infty} |h[l]| < \infty$

**Kausalität**  $h(t - \tau) = 0$  für  $\tau > t$   
 $h[n - l] = 0$  für  $l > n$

### Spezialfall



## 2.5. Korrelation (Ähnlichkeit) zweier Signale

$\rightarrow$  S. 22

## 2.6. Pegelrechnung

Signale im logarithmischen Maßstab.

$\rightarrow$  S. 23

## 3. Fourier-Reihe

Approximation einer periodischen Funktion  $x(t)$  durch Grund- und Oberschwingungen von Cosinus und Sinus.

### Definitionen

$x(t)$  periodisch und in  $T_0$  bis auf endlich viele Sprungstellen stetig:

Fourier-Reihe:  $\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$  ;  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Entwicklungskoeffizienten:  $c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

### Sinus und Cosinus

$\tilde{x}(t) = a_0 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t)}_{\text{gerader Anteil}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t)}_{\text{ungerader Anteil}} ; \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$c_k = \begin{cases} \frac{a_k - jb_k}{2} & \text{für } k \in \mathbb{N} \\ a_0 & \text{für } k = 0 \end{cases}$  ;  $a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) dt$

$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) \cos(k\omega_0 t) dt$ ;  $b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) \sin(k\omega_0 t) dt$

### Parsevalsches Theorem

Mittlere Signalleistung:

$\overline{P} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |\tilde{x}(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |c_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$

Weitere Definitionen  $\rightarrow$  S. 27

## Konvergenz und Abweichung

$\rightarrow$  S. 29

### Zeitverschiebung

$\tilde{x}(t - \tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0(t - \tau)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\tau) e^{jk\omega_0 t}$

$c_k(\tau) = c_k \cdot e^{-jk\omega_0 \tau}$

### Periodische Faltung

$\rightarrow$  S. 30

### Symmetrien

**achsensym.**  $\Rightarrow x\left(\frac{T_0}{2} + t\right) = x\left(\frac{T_0}{2} - t\right)$   
 $a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} x(t) dt$      $b_k = 0 \forall k$

**punktsym.**  $\Rightarrow x\left(\frac{T_0}{2} + t\right) = -x\left(\frac{T_0}{2} - t\right)$   
 $a_k = 0 \forall k$   
 $b_k = \frac{4}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$

**Halbwelle**  $\Rightarrow x(t) = -x\left(t + \frac{T_0}{2}\right)$   
 $a_k = \frac{4}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$   
 $b_k = \frac{4}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$   
 $k = 1, 3, 5, \dots$   
 $a_k = b_k = 0$  sonst

## 4. Fouriertransformation $x(t) \rightarrow X(\omega)$

Darstellung von beliebigem Signal  $x(t)$  im Spektralbereich  $x(t)$  bis auf endlich viele Sprungstellen stetig und  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

$\infty \Rightarrow x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$ :

Synthese  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Analyse  $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

### Parsevalsches Theorem $\rightarrow$ S. 31

Energie:  $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$

### Polarkoordinatendarstellung

$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\Psi(\omega)}$

### Spaltfunktion ( $x$ )

$si(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  mit

$\int_{-\infty}^{\infty} si(x) dx = \pi$      $\int_0^{\infty} si(x) dx = \frac{\pi}{2}$

$si(0) = \lim_{x \rightarrow 0} si(x) = 1$      $\lim_{A \rightarrow \infty} A si(Ax) = \pi \delta(x)$

### Zusammenhang FR $\Leftrightarrow$ FT

$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t) & \text{für } t \in \{T_0\} \\ 0 & \text{für } t \notin \{T_0\} \end{cases}$ , wobei  $\tilde{x}(t + rT_0) = \tilde{x}(t)$  mit  $r \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow c_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$  oder  $T_0 c_k = X(k\omega_0)$

## Eigenschaften der FT

Symmetrie, Verschiebung, Faltung, etc.  
→ S. 40

## Amplitudenmodulation

→ S. 45 - 49

## Vertauschungssatz

$$x_t(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_\omega(\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi} X_\omega(\omega) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} x_t(-\omega)$$

## Wichtige FT-Paare

→ S. 44

## Die Inverse Fouriertransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

$$\begin{cases} f(t) & , f \text{ stetig in } t \\ \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} & , \text{ falls } f \text{ unstetig in } t \end{cases}$$

## Übertragungsfunktion

$$y(t) = h(t) * x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \Rightarrow$$

$$\text{Wenn System stabil: } H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Mit DGL N-ter Ordnung und mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{l=0}^N a_l \frac{d^l}{dt^l} y(t) = \sum_{m=0}^M b_m \frac{d^m}{dt^m} x(t)$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{m=0}^M (j\omega)^m b_m}{\sum_{l=0}^N (j\omega)^l a_l}$$

Begründung: → S. 53

Darstellung in Bode-Diagramm: Beispiel → S.54 - 55

Begriffe der Filtertechnik: → S.51 - 52

## 5. Zeitdiskrete Fourier-Transformation ZDFT

Zeitnormierung:  $n = \frac{t}{T_s}$  und Frequenznormierung:  $\Omega = \omega T_s$

- $T_s$ : Abtastintervall
- $\omega$ : Kreisfrequenz
- $\Omega$ : Winkel, normierte Frequenz

Wenn  $x[n]$  aperiodisch und  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$ :

$$\begin{aligned} \text{Synthese } x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \\ \text{Analyse } X(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

Es gilt:  $X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$

## Parsevalsches Theorem → S. 58

$$\text{Energie: } E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

## Eigenschaften der ZDFT

Symmetrie, Verschiebung, Faltung, etc.  
→ S. 60

## Wichtige ZDFT-Paare

→ S. 62

## Übertragungsfunktion der ZDFT

$$y[n] = x[n] * h[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega)$$

$$\text{Wenn System stabil: } \Rightarrow H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Mit linearer Differenzengleichung N-ter Ordnung:

$$\sum_{l=0}^N a_l y[n-l] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

$$\Rightarrow H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l e^{-j\Omega l}}{\sum_{l=0}^N a_l e^{-j\Omega l}}$$

Begründung → S. 67

## 6. Signalabtastung und -rückgewinnung

### 6.1. Abtasttheorem im Zeitbereich

Bedingungen für eindeutige Signalrekonstruktion  
Abtastvorgang:  $x_s(t) = x(t)s(t)$ : Abtastsignal  $x_s(t)$  entsteht durch Modulation von  $x(t)$  mit Dirac-Impuls-Folge  $s(t)$ .

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$\Rightarrow x_s(t) = x(t)s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

Zeitnormierung:  $t = nT_s$  mit Abtastperiode  $T_s$  und Abtastfrequenz  $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$

$$\text{Übergang zum Frequenzbereich: } S(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - r\omega_s)$$

$$\Rightarrow X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * S(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X(\omega - r\omega_s)$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \geq 2\omega_g \quad (1)$$

$$T_s \leq \frac{\pi}{\omega_g} \quad (2)$$

$$x(t) \text{ ist bandbegrenzt} \quad (3)$$

## 7. Laplacetransformation $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

$$f(t) \Delta F(s) := \int_0^{\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

$1 \Delta \frac{1}{s}$	$\delta(t - t_0) \Delta e^{-st_0}$
$t^n \Delta \frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{at} \Delta \frac{1}{s-a}$
$\sin(t) \Delta \frac{1}{s^2 + 1}$	$\cos(t) \Delta \frac{s}{s^2 + 1}$
$\sin(\omega t) \Delta \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t) \Delta \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t) \Delta \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	
$e^{-at} \cos(\omega t) \Delta \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	

Linearität:  $\alpha f(t) + \beta g(t) \Delta \alpha F(s) + \beta G(s)$

Ähnlichkeit:  $f(ct) \Delta \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$

Ableitung Originalfkt:  $f'(t) \Delta sF(s) - f(0)$   $f''(t) \Delta s^2 F(s) - sf'(0) - f''(0)$

$f^{(n)}(t) \Delta s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \dots - f^{(n-1)}(0)$

Integral Originalfkt:  $\int_0^t f(x) dx \Delta \frac{1}{s} F(s)$

Ableitung Bildfkt:  $(-t)^n f(t) \Delta F^{(n)}(s)$

Verschiebung:  $f(t-a)\theta(t-a) \Delta e^{-as} F(s)$

Dämpfung:  $e^{-at} f(t) \Delta F(s+a)$

Faltung:  $(f * g)(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \Delta F(s) \cdot G(s)$

Inverse:  $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} F(s) \exp(st) ds$

Es gibt eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Originalfkt und Bildfkt. Meist Nennergrad > Zählergrad: Bruch geschickt umformen! Laplacetransformierte als Summe nie auf gemeinsamen Nenner bringen!!

### 7.1. Pol-Nullstellendiagramm

Konvergenz bei  $\sigma > \sigma_0$  mit  $\sigma_0 = \max$  Polstelle.