Signaldarstellung

Rechenregeln

Faltung eines Signals mit Dirac:

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \qquad x[n] * \delta[n - m] = x[n - m]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega) * \delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_0)$$

Vorteil: Dirac fällt weg $\rightarrow$ Vereinfachung des Signals durch Eliminieren von Termen

Multiplizieren eines Signals mit Dirac:

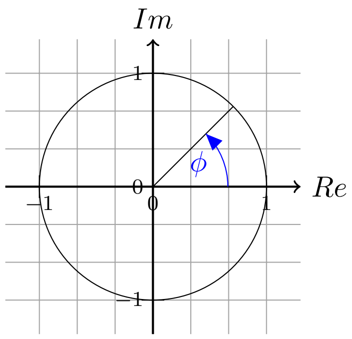
$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \qquad x[n]\delta[n - m] = x[m]\delta[n - m]$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega)\delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0)$$

Dirac fällt nicht weg! **Vorteil:** Das Signal x ist aber nun nicht mehr von t, ω, n abhängig und kann dann oft einfacher ausgewertet oder als Konstante herausgezogen werden.

Die komplexe Exponentialfunktion:

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j\sin(\phi)$$



$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j \qquad e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(j + 1)$$

$$e^{j\pi} = -1 \qquad e^{j\frac{3\pi}{2}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

Linearität

Eigentlich alle in Signaldarstellung betrachteten Systeme sind LTI-Systeme:

$$x(t)\ \big(x[n]\big) \longrightarrow \boxed{h(t)\ \big(h[n]\big)} \longrightarrow y(t)\ \big(y[n]\big)$$

Diese sind laut Definition **linear** und zeit-invariant. Wenn bei einem System also eine Impulsantwort oder deren FT/LT/ZDFT/ZT gegeben ist, **muss** das System linear sein. *Übrigens: Es ist vollkommen egal, ob im LTI-Systemblock die Impulsantwort $h(t)$ an sich steht oder deren FT $H(\omega)$, LT $H(s)$ oder im Zeitdiskreten die ZDFT/ZT.*

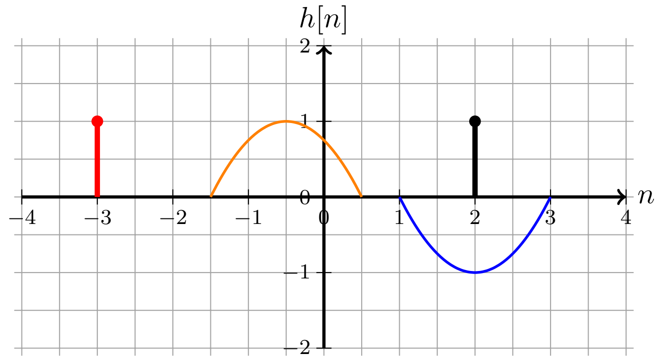
Ausblick in Regelungssysteme: Nichtlineare Systeme sehen z.B. so aus:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\ln(\,\cdot\,)} \longrightarrow y(t)$$

Hier wäre z.B. $y(t) = \ln(x(t))$.

Kausalität

LTI-Systeme, bzw. Filter, sind **kausal**, wenn sie nicht auf zukünftige Signale reagieren.
Beispiel:



$h[n] = \delta[n-2] \Rightarrow x[n] = h[n] * x[n] = x[n-2]$
$\Rightarrow$ Systemausgang reagiert auf vorherigen Eingang $\Rightarrow$ kausal / kausal

$h[n] = \delta[n+3] \Rightarrow x[n] = h[n] * x[n] = x[n+3]$
$\Rightarrow$ Systemausgang reagiert auf zukünftigen Eingang $\Rightarrow$ nicht kausal / nicht kausal

Für Impulsantworten kausaler Systeme gilt:

$$h[n] = 0 \;\forall\; n < 0$$

$$h(t) = 0 \;\forall\; t < 0$$

Ein zeitdiskretes System kann mit der ZT betrachtet werden: Die Impulsantwort besteht dabei aus einem Zählerpolynom (Grad M) und einem Nennerpolynom (Grad N). Die Terme mit dem höchsten Exponenten bestimmen das Verhalten des Systems:

$$Y(z) = X(z)H(z) = X(z)\frac{b_0 z^M + \ldots}{z^N + \ldots} \approx X(z)\left(b_0 z^{(M-N)} + \ldots\right)$$

$\bullet\!\!-\!\!\circ\; y[n] \approx b_0 x[n + (M-N)] + \ldots$

Für $M > N$ sieht das System also wieder in die Zukunft, es ist **nicht kausal**!

Ein zeitkontinuierliches System kann mit der LT betrachtet werden: Wieder wird ein Zählerpolynom (Grad M) und ein Nennerpolynom (Grad N) betrachtet:

$$Y(s) = X(s)H(s) = X(s)\frac{b_0 s^M + \ldots}{s^N + \ldots} \approx X(s)\left(b_0 s^{(M-N)} + \ldots\right)$$

Falls $M > N$: $y(t) \approx b_0 \frac{d^{M-N}}{dt^{M-N}} x(t) + \ldots$ beinhaltet also u.a. die $(M-N)$-te Ableitung von $x(t)$. Da eine ideale Ableitung $\frac{d}{dt}x(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)}{2\Delta t}$ für den Teil $x(t+\Delta t)$ „in die Zukunft sieht“, ist ein solches System **nicht kausal**.

Falls $M = N$: $y(t) \approx b_0 x(t) + b_1 \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau + b_2 \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau} x(\theta)d\theta d\tau + ...$
Da hier nur der aktuelle Wert $x(t)$ sowie Integrale, die den vergangenen Verlauf von $x(t)$ benötigen, auftauchen, sind diese Systeme **kausal**.

Falls $M \leq N$: Es tauchen nun nur noch Integrale auf, die nur die Vergangenheit berücksichtigen. $\Rightarrow$ **Kausal!**

Für sowohl Laplace- als auch Z-Transformationen der Impulsantworten kausaler Systeme gilt:

$$M \leq N$$

$\Rightarrow$ Zählergrad kleiner oder gleich Nennergrad

Stabilität

Ein System ist dann **asymptotisch stabil**, wenn sich der Ausgang aus einem beliebigen Zustand heraus im Unendlichen der 0 asymptotisch nähert, falls man den Eingang rechtsseitig beschränkt (wenn man x also ab einem beliebigen Zeitpunkt gleich 0 setzt):

$$x(t) = 0 \ \forall \ t > t_s \ \Rightarrow \ \lim_{t\to\infty} |y(t)| = 0$$

$$x[n] = 0 \ \forall \ n > n_s \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} |y[n]| = 0$$

Hierzu ein einfaches Beispiel aus dem kontinuierlichen Bereich: $H(s) = \frac{1}{s-p}$
$Y(s) = \frac{1}{s-p}X(s) \ \Rightarrow \ Y(s)(s-p) = X(s)$
$\bullet\!\!-\!\!\circ \ \dot{y}(t) - py(t) = x(t) \Rightarrow$ Trennung der Variablen, $t \to \infty \ \Rightarrow \ t > t_s \ \Rightarrow \ x(t) = 0$
$\Rightarrow \ \frac{dy}{dt} = py \ \Rightarrow \ \int \frac{1}{y}\, dy = \int p \ dt \ \Rightarrow \ \ln(y) = pt + c_1$
$\Rightarrow \ y(t) = ce^{pt} = ce^{Re\{p\}t}\left(\cos(Im\{p\}t) + j\sin(Im\{p\}t)\right)$
$\Rightarrow \ \lim\limits_{t\to\infty} |y(t)| = 0$, falls $Re\{p\} < 0$.

Man erkennt hier auch schön, dass ein System nur dann schwingfähig ist, falls es komplexe Polpaare gibt. Bei rein reellen Polen ergeben sich keine Cosinus- oder Sinusschwingungen.

Das selbe Beispiel im Zeitdiskreten: $H(z) = \frac{1}{z-p}$
$Y(z) = \frac{1}{z-p}X(z) \ \Rightarrow \ Y(z)(z-p) = X(z)$
$\bullet\!\!-\!\!\circ \ y[n+1] - p\ y[n] = x[n] \Rightarrow n \to \infty \ \Rightarrow \ n > n_s \ \Rightarrow \ x[n] = 0$
$\Rightarrow \ y[n+1] = p\ y[n] \ \Rightarrow$ „$y[\infty] = p^{\infty}\ y[n_s+1]$“
$\Rightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} |y[n]| = 0$, falls $|p| < 1$.

Auch hier gibt es bei komplexen Polen Schwingungen: Bsp: $p = \frac{1}{2}j$, $y[n_s+1] = +16$:
$y[n_s+3] = p^2\ y[n_s+1] = -4$ $\qquad$ $y[n_s+5] = p^4\ y[n_s+1] = +1$

Ein zeitdiskretes System ist asymptotisch stabil, falls für alle Pole der z-Transformation der Übertragungsfunktion gilt:

$$|z_{\infty,i}| < 1 \ \forall \ i$$

$\Rightarrow$ Pole liegen im komplexen Einheitskreis

Ein zeitkontinuierliches System ist asymptotisch stabil, falls für alle Pole der Laplace-Transformation der Übertragungsfunktion gilt:

$$Re\left\{s_{\infty,i}\right\} < 0 \ \forall \ i$$

$\Rightarrow$ Pole liegen in linker komplexer Halbebene

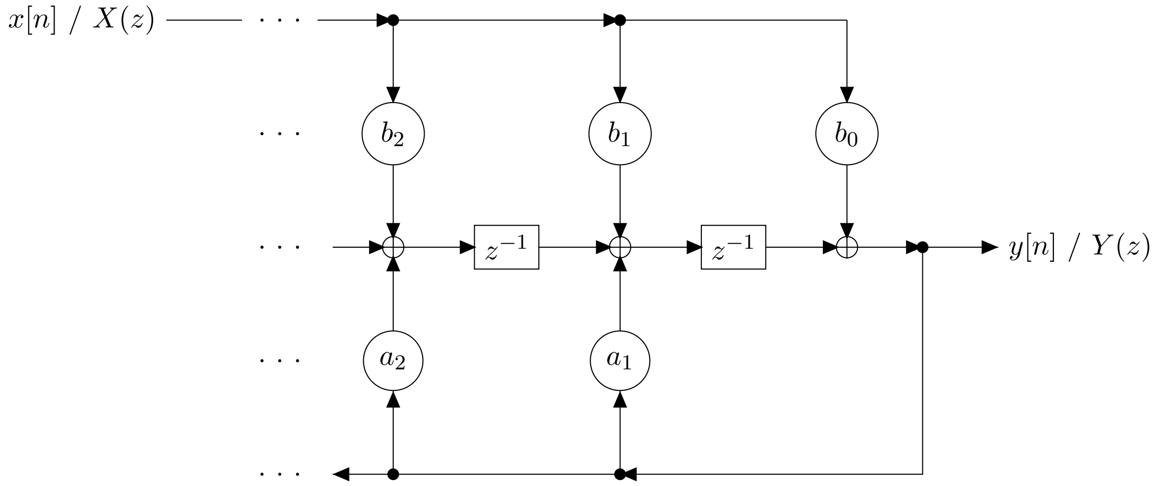
Bei Gleichheitszeichen ist keine allgemeine Aussage möglich (Es kommt dann u.a. auf die Vielfachheit der Pole an, ...).
Gilt das >-Zeichen für mindestens einen Pol in den obigen Gleichungen, dann ist das komplette System instabil.

Filterstruktur

Ein **kausales** (nicht kausal $\rightarrow$ nicht realisierbar) LTI-System mit einer Übertragungsfunktion der Form

$$h[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \ + \ ...}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} \ + \ ...}$$

kann durch folgende diskrete Filterstruktur dargestellt werden:



$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z) \ + \ ... \ + \ a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) \ + \ ...$$

$$\Rightarrow Y(z)\left(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} \ - \ ... \right) = X(z)\left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \ + \ ... \right)$$

$$\Rightarrow Y(z) = X(z)\frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \ + \ ...}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} \ + \ ...} = X(z)H(z) \bullet\!\!-\!\!\circ\ x[n] * h[n] = y[n]$$

Für ein kontinuierliches System erhält man genau die gleiche Filterstruktur, jedes z muss dann durch ein s ersetzt werden. Die Zeitverzögerungsblöcke ($z^{-1} \bullet\!\!-\!\!\circ\ \delta[n-1]$: Verzögerung um 1) werden dann zu Integratoren ($\frac{1}{s} \bullet\!\!-\!\!\circ\ u(t)$: Integrator).

Bedeutung der Nullstellen + Zusatz +

Im PN-Diagramm werden die Pole und Nullstellen der LTI-Filter-Übertragungsfunktionen (LT, ZT) eingezeichnet. Die Pole spiegeln die Stabilität des Systems wider. **Was aber bedeuten die Nullstellen?**

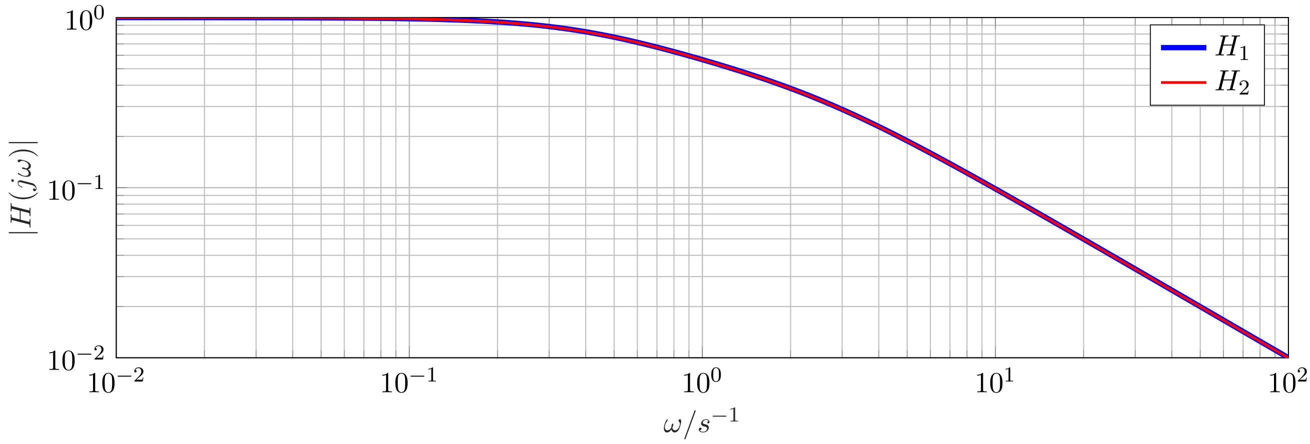
Man kann eine beliebige, komplexe Übertragungsfunktion $H(s)$ als Betrag und Phase schreiben: $H(s)|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|e^{j\phi\{H(j\omega)\}}$. Es werden nun beispielsweise folgende zwei Systeme betrachtet:

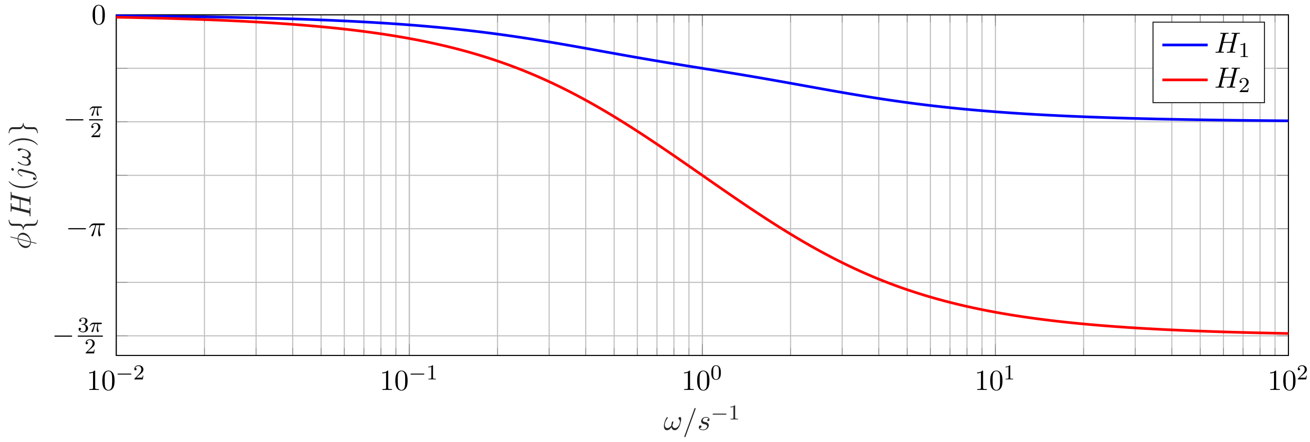
$$H_1(s) = \frac{s+1}{(s+0.5)(s+2)} \qquad\qquad H_2(s) = \frac{-s+1}{(s+0.5)(s+2)}$$

Die Pole sind gleich und liegen in der linken HE $\Rightarrow$ stabil, also keine unendlich hohen, divergierenden Signalwerte (siehe späterer Zeit-Plot)!

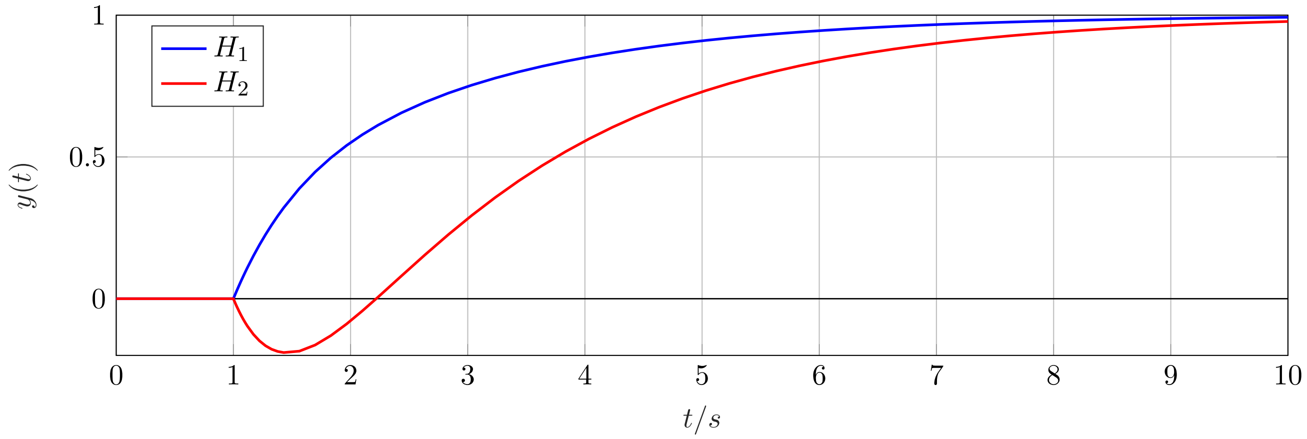
System 1 hat die Nullstelle $z_{0,1} = -1$ in der linken HE, System 2 hat die Nullstelle $z_{0,2} = 1$ in der rechten HE.

Beide Systeme haben den selben Betrag $|H(j\omega)|$ (Bode-Diagramm!). Die Phase ist allerdings unterschiedlich:





Die Phasenverschiebung ist also bei System 2 deutlich höher als bei System 1. Im Gegensatz zu System 2 gilt System 1 als minimalphasig. Daraus ergibt sich im maximalphasigen System 2 bei Anregung des Systems trotz des selben stationären Verhaltens (für $t \to \infty$ ist der Ausgang der Systeme gleich) auch eine langsamere Reaktion, bzw. ein längeres Einschwingen. Für $x(t) = u(t-1)$ ergeben sich zum Beispiel folgende Ausgänge:



Für zeitdiskrete Systeme ergibt sich ein ähnlicher Verlauf, hierbei müssen die Nullstellen minimalphasiger Systeme wieder (analog bei den Polen) innerhalb des Einheitskreises liegen.

Für zeitdiskrete Systeme gilt:

$|z_{0,i}| < 1 \; \forall \; i \;\; \Rightarrow$ Alle Nullstellen liegen im Einheitskreis:
Das System ist **minimalphasig** und hat damit die **minimale zeitliche Verzögerung** am Ausgang.

$|z_{0,i}| > 1 \; \forall \; i \;\; \Rightarrow$ Alle Nullstellen liegen außerhalb des Einheitskreises:
Das System ist **maximalphasig** und hat damit die **größtmögliche zeitliche Verzögerung** am Ausgang mit diesem Betragsverlauf.

Für kontinuierliche Systeme gilt:

$Re\{s_{0,i}\} < 0 \; \forall \; i \;\; \Rightarrow$ Alle Nullstellen liegen in linker HE:
Das System ist **minimalphasig** und hat damit die **minimale zeitliche Verzögerung** am Ausgang.

$Re\{s_{0,i}\} > 0 \; \forall \; i \;\; \Rightarrow$ Alle Nullstellen liegen in rechter HE:
Das System ist **maximalphasig** und hat damit die **größtmögliche zeitliche Verzögerung** am Ausgang mit diesem Betragsverlauf.

Alle Begründungen hier sind nicht mathematisch perfekt, geben aber einen ganz guten Überblick, wieso das alles so gilt.