Allgemeines

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	$-\infty$	0

$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$e^{\mathbf{A}^{-1}} = e^{-\mathbf{A}}$

Komplexe Zahl $z = a + ib$:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$arg(z) = \begin{cases} arctan(\frac{b}{a}), & a > 0 \\ arctan(\frac{b}{a}) \pm \pi, & a < 0, b \gtrless 0 \\ \pm\frac{\pi}{2}, & a = 0, b = \gtrless 0 \end{cases}$$

$detA = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

Matrixmultiplikation oft nicht kommutativ:

AB$\neq$ BA

$(\lambda_i I - A)v_i \stackrel{!}{=} 0$

$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}, det(AB) = det(A)det(B)$

$$det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{3+2} 2 det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(-2)(-1)^{3+3} det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -2$$

Zustandsgleichungen(innere Beschreibung) S.16

$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$

$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}$

$\underline{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

LTI-Sytem: $\Sigma(A, B, C, D)$ mit $dim\Sigma = n$

$\underline{\text{x}}$: Zustandsvektor

$\underline{\text{y}}$: Ausgangsvektor

$\underline{A}^{nxn}$: Dynamikmatrix

B^{nxr}: Eingangsmatrix

C^{qxn}: Ausgangsmatrix

D^{qxr}: Durchgriffsmatrix

Lösung der Zustandsdifferentialgleichung

$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau$

Übertragungsfunktionsmatrix S.22

$G(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)$, wobei $x_0 = 0$

Rosenbrocksystemmatrix S.22f

$R(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$, wobei x_0 =beliebig

Grundlegende Strukturen S.24f

Parallelschaltung

$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$

Reihenschaltung

$G(s) = G_2(s)G_1(s)$

Rückkopplung

$G(s) = (I + G_1(s)G_2(s))^{-1}G_1(s) = G_1(s)(I + G_2(s)G_1(s))^{-1}$

Pole S.26

Berechne Pole der einzelnen Elemente der Matrix G(s)
Eigentschaften:

- bestimmen wesentlich die asymptotische Stabilität
- können durch Rückkopplung beeinflusst werden
- bestimmen das modale Verhalten
- beeinflussen E/A-Verhalten
- Pole von G(s)=EW von A$\Rightarrow$ vollst. steuer-/beobachtbar$\rightarrow$ keine ENS

Nullstellen S.27

Eigentschaften:

- Berechnung aus Determinante det $G(s)$
- Pole können selbe Werte wie Nullstellen haben
- ein System ist minimalphasig, wenn $\forall$ÜNS: Re{ÜNS}< 0

- nichtsprungfähige Systeme(D=0, streng proper) mit derselben Anzahl an Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen(n=q=r) haben keine ÜNS
- Systeme mit quadratischen B und C haben keine ÜNS

Übertragungsnullstellen

stationäres Verhalten verschwindet(kein Ausgang). s_0 ist ÜNS, wenn:

- $detG(s_0) = 0$, falls G(s) quadratisch
- $rangG(s_0) < maxrangG(s)$, falls G(s) nicht quadratisch

maxrang ist die maximale Anzahl von Zeilen/Spalten, für die die Matrix quadratisch wäre

Invariante Nullstellen S.28f

$\rightarrow$ beschreiben inneres Verhalten
$R(\eta) = \begin{pmatrix} \eta I - A & B \\ -C & D \end{pmatrix}$
$detR(\eta) = det(\eta I - A)detG(\eta)$
INS sind die $\eta \in \mathbb{C}$, für die eine der folgenden Bedingungen gilt:
$detR(\eta) = 0$, R quadratisch
$rang(R\eta) < \underset{s}{maxrang}R(s)$, R nicht quadratisch
aus Schurformel:
$det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = detAdet(D - CA^{-1}B)$
INS ist genau dann ÜNS, wenn

- die INS mit keinem EW zusammenfällt oder
- der EW mit dem die INS zusammenfällt sowohl steuerbar als auch beobachtbar ist

Entkopplungsnullstellen S.30

Sind die INS, die weder steuerbar noch beobachtbar sind

$\Updownarrow$

Sind die INS, die kompensiert wurden/die mit einem EW zusammenfallen

Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit S.33ff

Voraussetzung:

1. Steuerbarkeit und Erreichbarkeit in endlicher Zeit ($t < \infty$)
2. Stabilisierbarkeit im asymptotischen Sinn ($t \rightarrow \infty$)
3. Rekonstruierbarkeit und Beobachtbarkeit in endlicher Zeit ($t < \infty$)
4. Entdeckbarkeit im asymptischen Sinn ($t \rightarrow \infty$)

Definitionen: *stabilisierbar*, *steuerbar*, *erreichbar*, *entdeckbar*, *rekonstruierbar*, *beobachtbar* $\rightarrow$ S.33

Steuerbarkeit S.34ff

Kalman: $rang(B, AB, ..., A^{n-1}B) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow$ vollst. steuerbar
Hautus: $rang(\lambda_i I - A, B) \overset{!}{=} n$ EW steuerbar$\leftarrow$ Hier: Berechne λ_i von A und finde nicht steuerbare EW
Gilbert: S.35, System liegt in kanonischer Normalform vor, B besitzt vollen Rang & linear unabhängige Zeilen

Beobachtbarkeit und asymptotisches Verhalten S.37ff

Kalman:$rang \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \overset{!}{=} n \Leftrightarrow$ vollst. beobachtbar
Hautus:$rang \begin{pmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{pmatrix} \overset{!}{=} n \Leftrightarrow$ EW beobachtbar
Gilbert: S.38, System in kanonischer Normalform, $\tilde{C}$ hat keine Nullspalte & linear unabhängige Spalten

Stabilisierbarkeit S.38

Wenn alle λ_i mit Re(λ_i)≥ 0 steuerbar sind

Entdeckbarkeit S.38

Wenn alle λ_i mit Re(λ_i)≥ 0 beobachtbar sind

Strukturelle Analyse

Strukturgraph S.41ff

Strukturelle Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit S.42ff

Eine Systemklasse $S(S_A, S_B, S_C)$ heißt strukturell steuerbar bzw. beobachtbar, wenn es mindestens ein System $\Sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \Sigma \in S$ gibt, das steuerbar bzw. beobachtbar ist. $S_{Adj} = \begin{pmatrix} S_A & S_B & 0 \\ 0 & 0 & S_R \\ S_C & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- strukturell steuerbar, wenn
  - S eingangsverbunden und
  - $s - rang(S_A, S_B) = n$
- strukturell beobachtbar, wenn
  - S ausgangsverbunden und
  - $s - rang \begin{pmatrix} S_A \\ S_C \end{pmatrix} = n$

s-rang: Die maximale Anzahl von 1-Elementen, die man so auswähöen kann, dass sie in getrennten Zeilen und Spalten stehen
eingangsverbunden: man kommt von beliebigem u zu allen x_i
ausgangsverbunden: man kommt mit allen x_i zu mind. einem y

Strukturell feste EW S.44f

- Typ 1: S ist entweder nicht eingangsverbunden oder nicht ausgangsverbunden oder beides nicht, oder
- Typ 2: wenn es keine Schleifenfamilie der Weite n gibt

Schleifenfamilie: Weite=# Zustandsknoten in Schleife

Stabilität von MIMO Systemen S.47ff

Nyquist-Stabilitätskriterium angewandt auf MIMO:

- E/A-Stabilität, da ÜF analysiert wird
- offener Regelkreis

$$\boxed{\mathrm{F(s)=I+K(s)G(s)}}$$

Berechne[⋆1]:

1 $\lim\limits_{\omega\to\infty} \Delta argdet(F(j\omega))$

2 Pole von F(s): $(n^+ + \frac{n^\circ}{2})\pi$

Wenn $\lim\limits_{\omega\to\infty} \Delta argdet(F(j\omega)) = (n^+ + \frac{n^\circ}{2})\pi$
⇔ geschlossener RK stabil, wobei

n^+: Pole der RHE

n°: Pole auf Im-Achse

Gegen den Uhrzeigersinn ist positiv

graphisch: für $\lim\limits_{\omega\to\infty} \Delta argdet(F(j\omega))$ ist 0 Bezugspunkt (**nicht** -1)

$\omega \in [0, \infty[$

Gershgorin Theorem:

1. Wenn F diagonaldominant ist, dann liegt der Nullpunkt nicht im Band
   ⇒<u>strikte Diagonaldominanz:</u>
   - $|F_{ii}(s\ bzw.\ j\omega)| > \sum\limits_{j=1, i\neq j} |F_{ij}(s\ bzw.\ j\omega)|$
   - $\hat{=} \begin{pmatrix} |.| & > & |.| \\ \vee & <\overset{\wedge}{\underset{\vee}{|.|}}> & \wedge \\ |.| & < & |.| \end{pmatrix}$
     Elemente werden meistens für $\omega = 0$ minimal, Vorsicht: Falls $\exists\omega$ für das nichtmehr $|.| > |.| \Rightarrow$ fail
2. Nyquist-SISO kann für jedes $F_{ii}(j\omega)$ angwandt werden
   ⇒Berechne Pole der $F_{ii}(j\omega)$ nach[⋆1]

Direkte Methode von Lyapunov für MIMO LTI:

- **stabil**, falls
  1. $V(x)$ positiv definit ist für $x \in W, x \neq x^\star$ und $V(x^\star) = 0$
  2. sowie

$$\dot{V} = \frac{d}{dt}V(x) = \sum_{i=1} \frac{dV}{dx_i}\dot{x}_i \leq 0$$

($\dot{V}$ ist negativ <u>semi</u>definit)

- **asymptotisch stabil**, falls stabil und zudem $\dot{V}(x)$ negativ definit

oder:
$V(x) = xPx^T, \quad \dot{V}(x) = x^T(A^TP + PA)x$

- $P \succ$ und $A^TP + PA \prec 0 \Leftrightarrow$asymptotisch stabil
- $P \succ$ und $A^TP + PA \preceq 0 \Leftrightarrow$stabil

überprüfbar mit $\boxed{A^TP + PA = -Q}$ mit $Q \succ 0$, wobei $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$ Berechne P und Q und dann teste auf Positivdefinitheit

Reglerentwurfsverfahren S.69

$u(t) = -K^{rxn}x(t) + L^{rxq}w(t)$
$\dot{x} = (A - BK)x + BLw$
$y = Cx$
K: Rückführmatrix
L: Vorfiltermatrix
w: Führungsgröße

Wahl der Vorfiltermatrix S. 70f

Vorfilter für Zustandsregler

- zuständig für stationäre Genaugikeit
- kein Einfluss auf Stabilität
- Existiert, wenn
  - geregeltes System asymptotisch stabil (alle EW(A-Bk) haben negativen Realteil)
  - es gibt keine invarianten Nullstellen in Null
- $L = (C(BK - A)^{-1}B)^{-1}$

Vollständige modale Synthese nach Roppenecker S.71ff

Vorgabe der EW λ_{K_i} und der Richtung der EW($\hat{=} EV v_{K_i}$) des geschlossenen Regelkreises.

$$v_{K_i} = (A - \lambda_{K_i}I)^{-1} \underbrace{Bp_i}_{Kv_{K_i}} \qquad \lambda_{K_i} \neq \lambda_i$$

p_i: Parametervektor

$$\lambda_{K_i} = \lambda_i \Rightarrow p_i = 0, \quad v_{K_i} = v_i$$
$$K = [p_1, \ldots, p_n](v_{K_i}, \ldots, v_{K_n})^{-1}$$

$\Rightarrow v_{K_i}, \ldots, v_{K_n}$ müssen linear unabhängig sein!

Gegeben: $\dot{x} = \ldots, y, p_i$ oder statt$p_i v_{K_i}$

1. Berechne v_{K_i} mit $v_{K_i} = (A - \lambda_{K_i}I)^{-1}Bp_i$ oder p_i aus $(A - \lambda_{K_i}I)v_{K_i} = Bp_i$ mit $Bp_i = B\begin{pmatrix} p_{i,x} \\ p_{i,y} \end{pmatrix}$ und Vergleich mit linker Seite
2. Berechne K mit $K = [p_1, \ldots, p_n](v_{K_i}, \ldots, v_{K_n})^{-1}$
3. Berechne L mit $L = (C(BK - A)^{-1}B)^{-1}$
4. Optional: Teste $V_K^{-1}(A - BK)V_K \stackrel{!}{=} diag(\lambda_{K_i})$

EW des geschlossenen RK sind EW von A-BK

Regelung für Störentkopplung S.75ff

nach dem Invarianzprinzip:

- Abbildung der Störung auf den nicht beobachtbaren Unterraum
- Annahme: $\dot{x} = Ax + Bu + Nd, \quad y = Cx, \quad u = -Kx$

1. Nur wenn $\lambda_{K_i} = \eta_j$ (INS) existiert eine nichttriviale Lösung für x_{K_i} und P_i
$$det\begin{pmatrix} \eta I - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_{K_i}$$
andere EW sind frei wählbar
2. Setze $Cv_{K_i} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow v_{K_i} = k\begin{pmatrix} v_x \\ \vdots \\ v_z \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$ ($\hat{=}$ nicht beobachtbaren Unterraum) **und** teste ob $N \stackrel{!}{=} k\begin{pmatrix} v_x \\ \vdots \\ v_z \end{pmatrix}$(allg.:$N = [\sum\limits_{i=1} a_i v_{K_i}, \sum\limits_{i=1} b_i v_{K_i}, \ldots, \sum\limits_{i=1} z_i v_{K_i}]$)
v_{K_i} müssen Basis aufspannen, aus der N entsteht
$$\Rightarrow v_{K_i} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \vdots \\ v_z \end{pmatrix}$$

Falls Bed. 1 oder Bed. 2 nicht erfüllbar $\Rightarrow$ keine Lösung möglich
Wenn erfüllt:

$$(\lambda_{K_i}I - A)v_{K_i} = -Bp_i \Rightarrow p_i$$
$$K = [p_1, \ldots, p_n](v_1, \ldots, v_n)^{-1}$$

Entkopplung nach Falb-Wolovich S. 79ff

Idee: MIMO System zu q SISO Systemen mit vorgegebener Dynamik

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad u = -Kx + Lw, C = \begin{pmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_q^T \end{pmatrix}$$

$y_{i,soll} = \frac{\gamma_i}{s^{\delta_i} + a_{\delta_{i-1}} s^{\delta_i - 1} + \dots + a_0}$

Voraussetzung: Entkopplungsmatrix E muss regulär sein $\Leftrightarrow detE \neq 0$

1. Bestimme Relativgrad δ_i für y_i
   Falls $\delta_i = \sum_i \delta_i < n$ müssen nicht beobachtbare/steuerbare EW stabil sein

2. Entkopplungsbedingung: $detE \neq 0$
   $$E = \begin{pmatrix} c_1^T A^{(\delta_1 - 1)} B \\ \vdots \\ c_q^T A^{(\delta_q - 1)} B \end{pmatrix} \Rightarrow L = E^{-1} T \text{ mit}$$
   $$T = \begin{pmatrix} \gamma_i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_q \end{pmatrix}$$

3. $$K = E^{-1} \begin{pmatrix} c_1^T A^{\delta_1} + \sum_{j=0}^{\delta_i - 1} a_{j,1} c_1^T A^j \\ \vdots \\ c_q^T A^{\delta_q} + \sum_{j=0}^{\delta_q - 1} a_{j,q} c_q^T A^j \end{pmatrix}$$

Relativgrad:

- Aus ÜF Zählergrad-Nennergrad
- Aus Zustandsraumdarstellung:
  y_i so oft ableiten (δ_i -mal) bis $y_i^{(\delta_i)} = f(u)$, wobei u nicht integriert wird, sondern direkt auf $y_i^{(\delta_i)}$ wirkt. Beginne mit $y_i = c_i x$(hier: $c_i \widehat{=}$Zeile von C)