$\dot{x} = Ax + bu$

$y = Cx + Du$

nicht sprungfähiges (streng proper) System: Wenn $D = 0$

Zusammenschaltung von Übertragungsfunktionen: S.24

Umwandeln der Matixdarstellung in die Übertragungsfunktion

$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

inverse einer Matrix: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Rosenbrock Systemmatrix: $\underbrace{\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}}_{\text{Rosenbrock Systemmatrix}} \begin{bmatrix} X(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ Y(s) \end{bmatrix}$

Pole und Nullstellen

1. Pole: Pole der einzelnen Elemente der Übertragungsmatrix
   Vielfachkeit: Minoren aufstellen: Jede einzelne mögliche Unterdeterminate daraus ergibt sich die Vielfachheit

2. Übertragungsnullstellen:
   bei Quadratischen $G(s)$: $det(G(z_i)) = 0$
   bei nicht Quadratischen: $rang(G(z_i)) < \underbrace{max}_{s} rang(G(s))$ mit $\underbrace{max}_{s} rang(G(s))$: Miniumum aus Anzahl der Spalten und Anzahl der Zeilen

   (a) können gleichen Wert wie Pole haben
   (b) nicht quadratische Übertragungsfkt. haben meist keine Übertragungsnullstellen
   (c) nicht sprungfähige Syteme mit gleichen Anzahl an Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen ($n = q = r$) haben keine ÜNS
   (d) Systeme mit quadratischen, nicht singulären B,C haben keine ÜNS
   (e) minimalphasig: Alle ÜNS haben negativen Realteil, sonst hat es Allpassverhalten

3. invarianten Nullstellen: mit Rosenbrockmatrix

   (a) $det(R(\eta)) = 0$ für Quadratische
   (b) $rang(R(\eta)) < \underbrace{max}_{s} rang(G(s))$

   Es gibt i. A. mehr invariante Nullstellen als ÜNS

   (a) Eingangsendkopplungsnullstelle: $rang(\eta I - A \quad -B) < n$
   (b) Ausgangsendkopplungsnullstelle: $rang \begin{pmatrix} \eta I - A \\ C \end{pmatrix} < n$

invariante Nullstellen sind ÜNS, wenn sie mit keinem Eigenwert zusammenfallen oder der Eigenwert, mit dem sie zusammenfallen sowohl steuerbar, als auch beobachtbar ist

Wenn Pole der Übertragungsfunktion Eigenwerte der Matrix A sind, dann ist das System vollständig steuer- und beobachtbar

Steuer- und Beobachtbarkeit

1. stabilisierbar: kann für einen beliebigen Anfangszustand x_0 in nicht unbedingt endlicher Zeit gesteuert werden
   Ist genau dann stabilisierbar, wenn alle nicht steuerbaren EW asymptotisch stabil sind: $rang(\lambda_i * I - A, B)\ \forall Re(\lambda_i) \geq 0$

2. steuerbar: kann für einen beliebigen Anfangszustand x_0 in endlicher Zeit gesteuert werden
   Ist genau dann steuerbar, wenn: $rang(Q_s) = n$ mit $Q_s = [B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B]$
   Ist genau dann steuerbar, wenn: $rang(\lambda_i * I - A, B) = n$ für alle Eigenwerte λ_i
   Eine Paralelschaltung zweier identischer Systeme ist nicht vollständig steuer und beobachtbar
   Gilbert (SISO): Eingangsvektor b braucht zwei lin unabh. Zeilen/Spalten für die Steuer- und Beobachtbrkeit eines zweifachen Eigenwerts

3. erreichbar: für einen beliebigen Endzustand x_e kann das System von dem Anfangszustand $x_0 = 0$ in endlicher Zeit in x_e überführt werden

4. entdeckbar: Anfangszustand $x_0 = 0$ kann bei einem geg. $u(t)$ aus dem zukünftigen Zeitverlauf $y(t)$ in nicht unbedingt endlicher Zeit ermittelt werden
   Wenn alle instabielen EW beobachtbar sind: $rang \begin{pmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{pmatrix} = n\ \forall Re(\lambda_i) \geq 0$

5. rekonstruierbar: geg. $u(t)$, dann kann aus dem vergangenen Zeitverlauf y(t) über eine endliche Zeitspanne der Zustand $x(t_e) = x_e$ eindeutig rekonstruiert werden kann

6. beobachtbar: geg. $u(t)$, dann kann aus dem zukünftigen Zeitverlauf von $y(t)$ über eine endl. Zeit den Anfangszustand eindeutig ermitteln
   Genau dann beobachtbar, wenn: $rang(Q_B) = n$ mit $Q_B = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$
   Genau dann beobachtbar, wenn: $rang \begin{pmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{pmatrix} = n$ für alle Eigenwerte λ_i

Strukturelle Analyse linearer Systeme

$S_A =$ jeden Eintrag von A, der ungleich 0 ist, zu 1 setzen
Gleiche mit S_B und S_C
Graphen zeichnen:$b_{ij} = 1$: Kante von u_j nach x_i (von Spalte nach Zeile)
$a_{ij} = 1$: Kante von x_j nach x_i (von Spalte nach Zeile)
$c_{ij} = 1$: Kante von x_j nach y_i (von Spalte nach Zeile)

Systemadjazentmatrix: $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_A & S_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ S_C & S_D & 0 \end{bmatrix}$

Struckturelle Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit: wenn mindestens ein System existiert, dass steuer- oder beobachtbar ist

1. struckturell steuerbar, wenn:
   - System eingangsverbunden: Es von jeden Eingangsknoten zu jedem Zustandsknoten mindestens einen Pfad gibt
   - $s - Rang(S_A \quad S_B) = n$: Einsen in jeder Zeile und Spalte zählen, jede eins muss pro Zeile und Spalte einmalig sein
2. struckturell beobachtbar, wenn
   - System ausgangsverbunden: Es von jeden Zustandsknoten zu jedem Ausgangsknoten mindestens einen Pfad gibt
   - $s - Rang(\begin{matrix} S_A \\ S_C \end{matrix}) = n$: Einsen in jeder Zeile und Spalte zählen, jede eins muss pro Zeile und Spalte einmalig sein, dann Anzahl addieren
3. struckturell feste Eigenwerte: Genau dann, wenn entweder:
   - Nicht ausgangsverbunden oder nicht eingangsverbunden (Typ 1)
   - Im Strukturgraphen gibt es keine Schleifenfamilie der Weite n. Schleifenfamilie: Menge der geschlossenen Pfade, die keine gemeinsame Knoten enthalten

Stabilität von MIMO

Rückführdifferenzatrix: $F(s) = I + G_{ol} = I + G(s)K(s)$

falls System vollständg beobachtbar und steuerbar ist (geschlossene und offene Kreis haben keine gemeinsamen Eigewerte) $det(F(s)) = k\frac{\prod_{i=1}^{n}(s-\overline{s}_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)}$ mit s_i: Pole des offenen Regelkreises $\overline{s}_i$: Pole des geschlossenen Kreises

- Zustandsstabilität: Zustandsvektor x nähert sich immer mehr seinem Gleichgeichtszustand an
  - Nyquistkriterium: geschlossene Regelkreis genau dann stabil, wenn: $\Delta argdet(F(s)) = -(2n^+ + n^0)\pi$ mit $F(s) = I + G_{ol} = I + G(s)K(s)$ (von $-\infty$ bis ∞) und n^+: Pole von G_{ol} mit positiven Realteil, n_0: Pole mit Realteil 0 (Kurve umschließt $(2n^+ + n^0)$ mal den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn)
    Äquivalnt dazu: $\Delta argdet(F(s)) = -(n^+ + \frac{n^0}{2})\pi$ für ω von 0 bis ∞ $(0 - \infty)$
    Graphsich: Vektor von 0 bis zu Ortskurve macht über die Zeit von ω den Winkel $\Delta argdet(F(s)) =$

$-(n^+ + \frac{n^0}{2})\pi$

$$arg(x+iy) = \begin{bmatrix} arctan(\frac{y}{x}) & \text{für } x > 0 \\ arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{für } x < 0 \text{ und } y \geq 0 \\ arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{für } x < 0 \text{ und } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \text{ und } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \text{ und } y < 0 \\ undefined & x = 0 \text{ und } y = 0 \end{bmatrix}$$

- G_{ol} nicht sprungfähig und E/A-stabil: $\rho(G_{ol}(j\omega)) < 1 \ \forall\omega$ (Betragsmäßig größter EW kleiner als 1 für alle ω)
- G_{ol} nicht sprungfähig und E/A-stabil: $\|G_{ol}(j\omega)\| < 1$
- Gershgorintherorem: $F(s)$ diagonaldominant und Haubtdiagonalelemente $F_{ii}(s)$ den Ursprung der komplexen Ebene nicht umschlingen (Radius der Kreise: $\sum\limits_{i \neq j} |F_{ij}(s)|$)
  Oder einfach für jedes Diagonalelement $F_{ii}(s)$) das Niquistkriterium einzeln anwenden, wenn jedes stabil, ist das ganze System stabil!
  diagonaldominant: Zeilen oder Spaltensumme kleiner als Diagonalelement

- E/A-Stabilität: beschränktes Eingagnsignal $\Rightarrow$ beschränktes Ausgangssignal (falls Anfangszusand 0 ist)Genau dann, wenn
  - asymptotisch stabil ist
    Luaponov: Finde Matrix $P = P^T \succ 0$(Alle EW größer 0) und $Q = Q^T \succ 0$, sodass gilt: $A^TP + PA = -Q$
  - Alle Lösungen von $det(I + G(s)K(s)) = 0$ negativen Realteil haben $Re(s_i) < 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}$ ($K(s)$ ist Reglerstrecke)

<u>**Entwurfsverfahren fü**r Zustandsregler</u>
$u(t) = -Kx(t) + L\omega(t) \Longrightarrow \dot{(x)} = (A - BK)x + BL\omega$
Wahl der Vorfiltermatrix: $L = (C(BK - A)^{-1}B)^{-1}$ (exisitert, falls System stabil und keine invariante Nullstelle in 0) **Vollständige Modulare Synthese nach Roppenecker**
$v_{K_i} = (A - \lambda_{K_i}I)^{-1}Bp_i$ (p_i: frei wählbare Parametervektoren, falls die Vektoren eine Basis bilden gilt: $Kv_{K_i} = p_i$ oder $K = (p_1, ..., p_n)(v_{K_1}, ..., v_{k_n})^{-1}$)
für was sind die Parametervektoren gut?:

- Spalten von K zu 0 machen: Verzicht auf eine Messung
- einzelne Elemente von K zu 0 machen: dezentrale Zustandsrückführung
- Stellgrößenausschläge vermindern
- Robustheit erhöhen
- Erhaltung eines Streckeneigenwertes: $v_{K_j} = v_j$ und $p_j = 0$

Regelung für Störentkopplung $\dot{x} = Ax + Bu + Nd$ (d: Störung) und $u = -Kx$

1. Bestimme v_{k_i} so, dass gilt: $Cv_{k_i} = 0$ (falls sich alle Spaltenvektoren von N(Matrix der Störung) mit den Vektoren v_{k_i} darstellen lassen ist eine Störentkopplung möglich, sonst nicht)

2. Bestimme k invariante Nullstellen η_i (k ist Anzahl von lin. unabh. v_{K_i}) Die Nullstellen sind die Regleungseigenwerte λ_{K_i}

3. Berechne p_i: $v_{K_i} = (A - \lambda_{K_i} I)^{-1} B p_i$

4. Restlichen $n - k$ Eigenwerte mit Parametervorgabe sind frei wählbar (bei denen von A belassen)

5. Filtermatrix $K = (p_1, ..., p_n)(v_{K_1}, ..., v_{k_n})^{-1}$

Enfkopplungsregelung nach Falb-Wolovich

1. Bestimmung der Gesamtdifferenzenordnung δ
   Bestimmung von δ_i: Leite y_i so oft ab, bis y_i von u abhängig ist
   Bestimmung von δ: $\delta = \sum \delta_i$

   - $\delta = n$: weiter mit 2
   - $\delta < n$:es existieren EW die nicht als Pole von der Übertragungsfkt G auftauchen. Diese werden in invariante Nullstellen verschoben $\Rightarrow$ Überprüfe interne Stabilität: $R(\eta) < 0$(alle Rangabfälle der Rosenbrockmatrix haben negativen Realteil), wenn ja dann weiter mit 2, andernfalls mach Entkopplungsregelung das System instabil

2. Entkopplungsbedingung erfüllt?: $det(E) \neq 0$ (wenn nein, abbruch) mit $E = \begin{bmatrix} c_1^T A^{\delta_1 - 1} B \\ \vdots \\ c_q^T A^{\delta_q - 1} B \end{bmatrix}$ $(C = \begin{bmatrix} c_1^T \\ c_2^T \\ \vdots \\ c_b^T \end{bmatrix})$

3. Vorfilter: $L = E^{-1}\Gamma$, Γ aus gewünschten Führungsübertragungsfunktionsverhalten: $\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma_q \end{bmatrix}$

4. Regelmatrix: $K = E^{-1} \begin{bmatrix} c_1^T A^{\delta_1} + \sum\limits_{\nu=0}^{\delta_1 - 1} M_{1\nu} c_1^T A^{\nu} \\ \vdots \\ c_q^T A^{\delta_q} + \sum\limits_{\nu=0}^{\delta_q - 1} M_{q\nu} c_q^T A^{\nu} \end{bmatrix}$ M_{ij} ergeben sich aus den Polen der entkoppelten
   Übertragungsfunktion: $y_i = \frac{\gamma_i}{s^{(\delta_i)} + ... + M_{i1}s + M_{i0}} \omega_i(s)$
   Für Stationäre Genauigkeit muss für $s = 0$ gelten, dass: $y_i = w_i \Longrightarrow \gamma_i = M_{i0}$

Nyquist-Verfahren

Aufteilen eines komplexen Gesamtsystems in mehrere kleine, einzelne, lokal steuerbare Systeme:

$$\dot{x} = Ax + Bu \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \ddots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \ddots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Stabilitätsbedingung:

- $G_{ol,i}(s)$ den Punkt -1 $-n^+$-mal im Uhrzeigersinn umschlingt (n^+: Anzahl der Pole von $G_o l$ mit positiven Realteil)
- die Rückführmatrix $F(s) = I + G_{ol}(s)$ diagonaldominant ist (Damit Systeme unhanhängig vom Ausfall einzelner Systeme noch stabil sind)

Vorgehen, wenn $D = 0$ (System nicht Sprugfähig), G näherungsweise diagonaldominant ist, die Regelstrecke E/A-stabil ist:

- Entwurf der einzelenen SISO Reglern $K_i(s)$
- Überprüfen ob die Rückführmatrix diagonaldominant ist
- Simulation für das gesamte System

max., min. Verstärkung eines Systems: Eigenwerte von $\sqrt{eig(GG^T)}$, Richtung aus den Eigenvektoren

Relative Gain Error: $RGA(G) = G \times (G^{-1})^T \rightarrow RGA(\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{bmatrix}$ mit $a = \frac{1}{1-\frac{G_{12}G_{21}}{G_{11}G_{22}}}$

$RGA(G) = I$, falls G untere oder obere Dreiecksmatrix

zeigt an:

- Vorzeichen eines RGA-Eintrags ändert sich für $s = 0$ bis $s = \infty$: G oder ein Subsystem von G hat eine Nullstelle in der rechten Halbebene
- Feststellen von Diagonaldominanz: $\|RGA(G) - I\|_{sum}$ (Summe aller Beträge der Einträge) soll bei der Durchtrittsfrequenz ω_C Nahe bei 0 liegen
  ω_C: $|G_{ol}(j\omega)|$ schnedet zum ersten mal die Eins von oben

Sensitivitätsfunktion: $S = (I + GK)^{-1} = (I + G_{ol})^{-1}$ und $T = (I + GK)^-1GK = (I + G_{ol})^{-1}G_{ol} = G_{ol}(I + G_{ol})^{-1}$ und $S + T = I$

Bandbreite: $|S(j\omega_B)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (von unten schneiden)

und $|T(j\omega_{BT})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Loop-shaping:

- Gutes Folgeverhalten: $T(j\omega) \rightarrow I$ oder $|G_{ol}(s)|$ möglichst groß
- Gute Stöunterdrückung: $S(j\omega) \rightarrow 0$
- Gute Rauschunterdrückung: $T(j\omega) \rightarrow 0 \Rightarrow |T(j\omega)| \rightarrow 0$ (für hohe Frequenzen)

- Niedriger Energieaufwand: $K(j\omega)S(j\omega) \to 0 \Rightarrow |K(j\omega)S(j\omega)| \to 0$
- Gewährleistung einer Bandbreite $|S(j\omega)| < 3dB \forall \omega < \omega_B$: Gutes Folgeverhalten für alle Frequenzen $\omega < \omega_B$
- Beschränkung des stationären Folgefehlers (max Amplitude A): $\lim_{t\to\infty} |e(t)| = \lim_{s\to 0} |S(s)| < A$
- Beschränkung des maximalen Regelfehlers M: $\max_{\omega} S(j\omega) \leq M$

In Form von Schrankenfunktionen: $\omega_S(s) = \frac{\frac{s}{M}+\omega_B}{s+\omega_B A}$ (oder mit stärkeren Flanken: $\omega_S(s) = (\frac{\frac{2}{\sqrt{M}}+\omega_B}{s+\omega_B\sqrt{A}})^2$)
$|S|$ soll beschränkt werden: $|S(j\omega)| < \frac{1}{|\omega_S|} \Rightarrow \|\omega_S(j\omega)s(j\omega)\|_\infty < 1$ H_∞-Norm: größter Betragsmäßiger Wert über alle Frequenen
$|T|$ soll beschränkt werden: $|T| < |\omega_S|$
fundamentale Performenceschranken:

- $\left|\frac{1}{\omega_S}\right| + \left|\frac{1}{\omega_T}\right| \geq 1$
- Pole in Rechter Halbebene: $T(p) = 1$ und $S(p) = 0$
- Nullstellen in Rechte HE: $T(z) = 0$ und $S(z) = 1$
- Wasserbetteffekt: Sensitivität stiegt für eine Frequenz $\Rightarrow$ Sie sinkt für eine andere Frequenz
- Grenzen des Sensitifitätspeaks: $\|\omega_S S(s)\|_\infty \geq |\omega_S(z)|$ mit z: Nullstelle in RHE
- Stabilitätskriterien: $G(s)$ mit N_z Nullstellen z_j und N_p Polen p_i in der RHE

  1. für alle Nullstellen z_j: $\|\omega_S S\|_\infty \geq c_{1j} |\omega_S(z_j)|$ mit $c_{1j} = \prod_{i=1}^{N_p} \frac{|z_j+p_i^*|}{|z_j-p_i|} \geq 1$
  2. für alle Pole p_i: $\|\omega_T T\|_\infty \geq c_{2i} |\omega_T(p_i)|$ mit $c_{2i} = \prod_{j=1}^{N_p} \frac{|z_j^*+p_i|}{|z_j-p_i|} \geq 1$

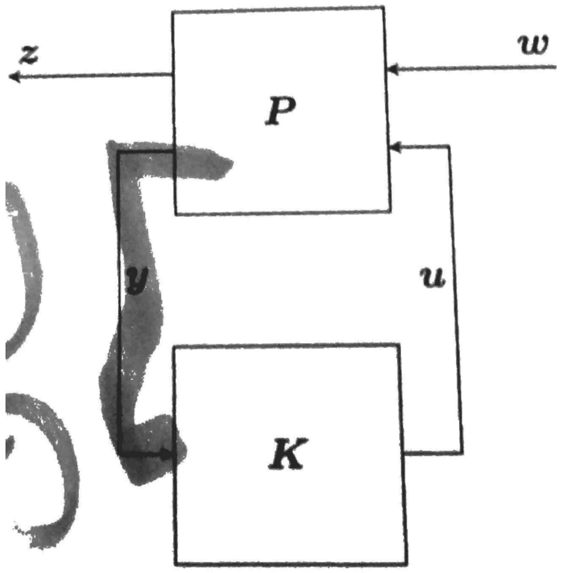
- Einfluss von Nullstellen N_z in der RHE:
  - Nach Einheitssprung wirs das Antwortverhalten N_z-mal die 0 durchqueren
  - impliziert High Gain instability

im MIMO-Fall

- $\left|\frac{1}{\omega_S}\right| + \left|\frac{1}{\omega_T}\right| \geq 1$
- mit Ausgangsrichtung y_Z: für Nullstelle: $y_z^* T(z) = 0$ und $y_z^* S(z) = y_z^*$; für Polstelle: $S(p)y_P = 0$ und $T(p)y_P = y_P$
- Grenzen des Sensitifitätspeaks: $\|\omega_S S(s)\|_\infty \geq |\omega_S(z)|$ mit z: Nullstelle in RHE
- Für mehr als eine Nullstelle: Skript: Seite 106 unten
- Performanzbeschränkung für die Gewichtungsfunktion:

- entweder Pole oder Nullstellen in der RHE: $\omega_B = z_j \frac{1-\frac{1}{M}}{1-A}$ für $\omega_{B2} = \frac{\frac{s}{M}+\omega_B}{s+\omega_B A}$
- entweder Pole oder Nullstellen in der RHE: $\omega_B > p_i \frac{M_T}{M_T-1}$ für $\omega = \frac{s}{\omega_B} + \frac{1}{M_T}$
- Pole und Nullstellen: $\|S\|_\infty \geq \max_{z_j} c_{1j}$ und $\|T\|_\infty \geq \max_{p_i} c_{2i}$
- genau eine Pol und eine Nullstelle: $c_2 = c_1 = \sqrt{sin^2(\phi) + \frac{|z+p*|^2}{|z-p|^2} cos^2(\phi)}$ mit $\phi = cos^{-1}(y_z^* y_p)$
- es ist möglich eine Nullstelle in der RHE in einen weniger wichtigen Bereich am Ausgang zu verschieben

H-unendlich-Regleung:



1. Sammeln aller Störsignale im Vektor ω
2. Abhängigkeiten von z von allen Eingängen (ω und u) (Regler entspricht leeres Feld, d.h. kein Signal geht durch)
3. Bestimmen von y (EINGANG VON K) durch alle Eingänge
4. verallgemeinterte Strecke ist dann: $\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \omega \\ u \end{bmatrix}$
   mit: $z = P_{11}\omega + P_{12}u$ und $y = P_{21}\omega + P_{22}u$
5. $N = P * K = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$