Kirchhoff - Gesetze

- Konzentriertheitshypothese: $\boxed{d \ll \lambda}$ d = Größe der Schaltung; Wellenlänge $\lambda = cT$
- Knotenregel, <u>KCL</u>: $\sum_{Knoten} i_j(t) = 0$ (herausfließende Ströme positiv)
- Maschenregel, <u>KVL</u>: $\sum_{Umlauf} u_j(t) = 0$ (Spannungen in Umlaufrichtung positiv)
- Knoteninzidenzmatrix: $A' = \begin{array}{c} \left[\begin{matrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1b} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nb} \end{matrix}\right] n\ Knoten \\ b\ Zweige \end{array}$

Spaltensummen von A' sind immer = 0
$\Rightarrow$ Zeile des Bezugsknotens streichen $\Rightarrow$
$\boxed{A \cdot \underline{i} = 0}$ (red. Knoteninzidenzmatrix)

$M = A'^T$ mit $u = M' u_k'$ $\Rightarrow$ KVL in Matrixform: $\boxed{\underline{u} - A^T \underline{u_k} = 0}$

Resistive Eintore

- Implizite Darstellung: $f_F(u,i) = 0$
- Parameterdarstellung: $u = u_F(\lambda)$, $i = i_F(\lambda)$
- Explizite Darstellung: $i = g_F(u)$; $u = r_F(i)$
  Leitwertsdarst. ; Widerstandsdarst.

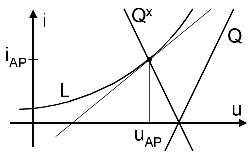
- F ungepolt $\Rightarrow$ Kennlinie punktsymm. zum Urspr.
- F aktiv $\Rightarrow$ mind. 1 Pkt. im II. od. IV. Quadr.
- F verlustfrei $\Rightarrow$ nur auf Koordinatenachsen
- F quellenfrei $\Rightarrow$ enthält den Ursprung
- F streng linear $\Rightarrow$ $(ku, ki) \in F$; $(u_1 + u_2, i_1 + i_2) \in F$

- <u>Umpolung</u>: $\overline{F}$ entsteht durch Punktspiegelung von F am Unsprung: $(\overline{u}, \overline{i}) = (-u, -i) \in \overline{F}$

- <u>Dualität</u>: $(u,i) \in F \Leftrightarrow \left(R_d i, \frac{u}{R_d} \right) \in F^d$

- Parallelschaltung von Widerstandsgeraden: $G = G_1 + G_2 \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow \boxed{R = R_1 \| R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$
- Serienschaltung von Widerstandsgeraden: genauso wie Parallelschaltung nur R statt G

- <u>Arbeitspunkt</u> ermitteln:
  1. Schaltung aufteilen in Quelle Q und Last L
  2. Parameterdarstellung $\Rightarrow$ Kennlinien zeichnen
  3. Lösung: Schnittpunkte der Kennlinien! $\Rightarrow$ ist die Funktion im AP stetig und diffbar, kann man sie dort <u>linearisieren</u>



Resistive Zweitore

- <u>Beschreibungsformen</u>:
  - Implizit: $\underline{f}(\underline{u}, \underline{i}) = 0$
  - Parameterisiert: $\begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{c}) \\ \underline{i}(\underline{c}) \end{bmatrix} \in F$
  - Explizit:
    G : Leitwertsmatrix
    R : Widerstandsmatrix
    H : Hybridmatrix
    H' : „inverse“ Hybridmatrix
    A : Kettenmatrix
    A' : „inverse“ Kettenmatrix

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}u_2 - a_{12}i_2 \\ a_{21}u_2 - a_{22}i_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{G} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}u_1 + g_{12}u_2 \\ g_{21}u_1 + g_{22}u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A'} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11}u_1 - a'_{12}i_1 \\ a'_{21}u_1 - a'_{22}i_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}i_1 + r_{12}i_2 \\ r_{21}i_1 + r_{22}i_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}i_1 + h_{12}u_2 \\ h_{21}i_1 + h_{22}u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H'} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11}u_1 + h'_{12}i_2 \\ h'_{21}u_1 + h'_{22}i_2 \end{bmatrix}$$

- <u>Aufstellen der Matrix</u> z.B. G: $g_{11} = \frac{i_1}{u_1}\Big|_{u_2=0}$ $g_{12} = \frac{i_1}{u_2}\Big|_{u_1=0}$ $g_{21} = \frac{i_2}{u_1}\Big|_{u_2=0}$ $g_{22} = \frac{i_2}{u_2}\Big|_{u_1=0}$

  oder: R: $r_{11} = \frac{u_1}{i_1}\Big|_{i_2=0}$ $r_{12} = \frac{u_1}{i_2}\Big|_{i_1=0}$ $r_{21} = \frac{u_2}{i_1}\Big|_{i_2=0}$ $r_{22} = \frac{u_2}{i_2}\Big|_{i_1=0}$

- <u>Linearisierung</u> (implizit): $\Delta f(\Delta u, \Delta i) = M \Delta u + N \Delta i = 0$

$$M := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \qquad N := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial i_1} & \frac{\partial f_1}{\partial i_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial i_1} & \frac{\partial f_2}{\partial i_2} \end{bmatrix}$$

- streng linear (= linear und quellenfrei): eine beliebige Linearkomb. zweier Betriebspunkte ist wieder ein BP

$$\begin{bmatrix} \underline{u}^{(1)} \\ \underline{i}^{(1)} \end{bmatrix} \in F \wedge \begin{bmatrix} \underline{u}^{(2)} \\ \underline{i}^{(2)} \end{bmatrix} \in F \Rightarrow \alpha \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}^{(1)} \\ \underline{i}^{(1)} \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} \underline{u}^{(2)} \\ \underline{i}^{(2)} \end{bmatrix} \in F ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{f(\underline{u}, \underline{i}) = M \underline{u} + N \underline{i} = 0}$$

- Linearisierung (explizit): $\underline{i} = \underline{G}(\underline{u}) = I + \frac{\partial g(\underline{u})}{\partial \underline{u}} \Delta \underline{u} = I + G \underline{u}$ mit $G = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{AP}$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix}$$

G ist Jacobimatrix

Taylor: $f_{lin}(x) = f(x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}\Big|_{x_0} \cdot (x - x_0)$

Nullator	$u=0$ $\quad i=0$		- streng linear; verlustlos - dual zu sich selbst
Norator	$u=$ beliebig $\quad i=$ beliebig		- streng linear; aktiv - dual zu sich selbst
Leerlauf	$u=$ beliebig $\quad i=0$		- streng linear - dual zum Kurzschluss
Kurzschuß	$u=0$ $\quad i=$ beliebig		- streng linear - dual zum Leerlauf
ohmscher Widerstand	$u=R\cdot i$ $\quad i=G\cdot u$		- streng linear - passiv $\quad R^d=\frac{R_d^2}{R} \quad G^d=\frac{1}{R_d^2 G}$
ideale Stromquelle	$u=$ beliebig $\quad i=i_0$		- spannungsgesteuert; aktiv; gepolt - linear, dual zur Spannungsquelle
ideale Spannungsquelle	$u=u_0$ $\quad i=$ beliebig		- stromgesteuert; aktiv; gepolt - linear; dual zur Stromquelle
reale Diode	$u_D=U_T\ln(i_D/I_S+1)$ $i_D=I_S[\exp(u_D/U_T)-1]$		- gepolt; passiv $\quad U_T=25mV$ - quellenfrei $\quad I_S\approx pA$
Photodiode	$i(0)=I_S\cdot[\exp(u(t)/U_T)-1]-i_L(t)$		- gepolt; aktiv
Zenerdiode	$u<U_Z \Rightarrow i$ sehr groß Zehnerdurchbruch		- gepolt; passiv - quellenfrei
Tunneldiode			- gepolt; passiv; quellenfrei - inkremental aktiv !
ideale Diode	$u=0$ für $i>0$ $i=0$ für $u<0$		- verlustlos; stückweise linear - dual: umgepolte ideale Diode
Konkaver (G,U) Widerstand	$i=0$ für $u\leq U_0$ $i=G(u-U_0)$ für $u\geq U_0$		- stückweie linear - für $U_0>0$, $G>0$: passiv, spannungsgesteuert - dual: konvexer Widerstand
Konvexer (R,I) Widerstand	$u=0$ für $i\leq I_0$ $u=R(i-I_0)$ für $i\geq I_0$		- stückweise linear; für $I_0>0$, $R>0$ stromgest. - dual: konkaver Widerstand
Lineare Quellen	R, U_0 ≡ G, I_0		- linear; aktiv - $U_0=I_0R$, $\quad I_0=U_0G$

Spannungs gest. Stromquelle **USI** VCCS	$i_1=0$, $i_2=gu_1$, u_1, u_2	$A=\begin{bmatrix}0 & -1/g\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad G=\begin{bmatrix}0 & 0\\ g & 0\end{bmatrix}$ $\quad M=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -g & 0\end{bmatrix}$ $\quad N=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
Strom gest. Stromquelle **ISI** CCCS	$u_1=0$, i_1, $i_2=\beta\cdot i_1$, u_2	$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1/\beta\end{bmatrix}$ $\quad H=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \beta & 0\end{bmatrix}$
Spannungs gest. Spannungsq. **USU** VCVS	u_1, i_1, $i_2=\mu\cdot i_1$, u_2	$A=\begin{bmatrix}1/\mu & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad H'=\begin{bmatrix}0 & 0\\ \mu & 0\end{bmatrix}$
Strom gest. Spannungsquelle **ISU** CCVS	$u_1=0$, i_1, $i_2=r\cdot i_1$, u_2	$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1/r & 0\end{bmatrix}$ $\quad R=\begin{bmatrix}0 & 0\\ r & 0\end{bmatrix}$ $\quad M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\quad N=\begin{bmatrix}0 & 0\\ -r & 0\end{bmatrix}$

Nullor quellenfrei, streng linear	u_1, i_1, i_2, u_2	$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$ $\quad M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad N=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$
Gyrator, Dualwandler idealer G.: $R_1=R_2=R_d$ verlustlos; $G=-G^T$; $R=-R^T$ **P**ositiv **I**mmittanz **I**nverter $F_{Gyr}=F^d$	u_1, i_1, i_2, u_2 $R_1 : R_2$ $det\,A = det\,A' = -1$	$A=\begin{bmatrix}0 & R_1\\ 1/R_2 & 0\end{bmatrix}$ $\quad M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\quad N=\begin{bmatrix}0 & R_1\\ -R_2 & 0\end{bmatrix}$ $G=\begin{bmatrix}0 & 1/R_2\\ -1/R_1 & 0\end{bmatrix}$ $\quad R=\begin{bmatrix}0 & -R_1\\ R_2 & 0\end{bmatrix}$ $\quad A'=\begin{bmatrix}0 & -R_2\\ -1/R_1 & 0\end{bmatrix}$
Idealer Übertrager verlustlos, reziprok, umkehrbar für $ü=\pm 1$ **P**ositiv **I**mmittanz **K**onverter	ü : 1 $det\,A = det\,A' = +1$	$A=\begin{bmatrix}ü & 0\\ 0 & 1/ü\end{bmatrix}$ $\quad M=\begin{bmatrix}1 & -ü\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad N=\begin{bmatrix}0 & 0\\ ü & 1\end{bmatrix}$ $H=\begin{bmatrix}0 & ü\\ -ü & 0\end{bmatrix}$ $\quad H'=\begin{bmatrix}0 & -1/ü\\ 1/ü & 0\end{bmatrix}$ $\quad A'=\begin{bmatrix}1/ü & 0\\ 0 & ü\end{bmatrix}$
NIK Negativ Immittanz Konverter aktiv, antireziprok, für $\|k\|=1$ symmetrisch	k = 1 : F ist an der i_1 -Achse gespiegelter Zweipol k = -1 : F ist an der u_1 - Achse gespiegelter Zweipol	$A=\begin{bmatrix}-k & 0\\ 0 & 1/k\end{bmatrix}$ $\quad M=\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad N=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1/k\end{bmatrix}$ $\quad k\in\mathbb{R}$ $H=\begin{bmatrix}0 & -k\\ -k & 0\end{bmatrix}$ $\quad H'=\begin{bmatrix}0 & -1/k\\ -1/k & 0\end{bmatrix}$ $\quad A'=\begin{bmatrix}-1/k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$

Klassifizierung der Zweitore anhand der Kettenmatrix A

- alle vier Einträge gleich Null ⇒ Nullor
- drei Einträge gleich Null ⇒ gesteuerte Quelle
- zwei Einträge gleich Null ⇒ INVERTER / KONVERTER

	INVERTER (z.B. Gyrator)	KONVERTER (z.B. NIK; PIK)
positiv	$\begin{bmatrix} 0 & R \\ 1/R & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1/ü & 0 \\ 0 & ü \end{bmatrix}$
negativ	$\begin{bmatrix} 0 & R \\ -1/R & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix}$
	Strom ⇔ Spannung	Strom ⇔ Strom; Spannung ⇔ Spannung

- Leistung: $p=\underline{u}^T\underline{i}$
- Verlustlosigkeit: $\forall \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} \in F:\ \underline{u}^T\underline{i}=0$ bzw. $U^T I + I^T U = 0$
- Passivität: $\forall \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} \in F:\ \underline{u}^T\underline{i}\geq 0$
- Aktivität: $\exists \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} \in F:\ \underline{u}^T\underline{i}<0$

- Reziprozität: $U^T I - I^T U = 0;\ G=G^T;\ R=R^T;\ \det A = 1;\ \det A' = 1$
  Netzwerk besteht nur aus R, C, L ⇒ reziprok
- Dualität: $\mathcal{F}^d \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \mathcal{F} \begin{bmatrix} 0 & R_d E \\ \frac{1}{R_d}\cdot E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix}$ $\quad G^d = \frac{1}{R_d^2}\cdot R \quad R^d = R_d^2\cdot G$
- Symmetrie: $\mathcal{F}^u \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \mathcal{F}(P\cdot\underline{u}, P\cdot\underline{i})$ mit $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = P^{-1}$ $\quad G=PGP,\ R=PRP,\ A=A'$
  z.B.: $g_{11}=g_{22}$ und $g_{12}=g_{21}$

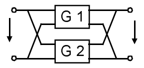
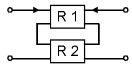
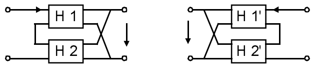
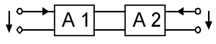
Die Umrechnungstabelle der Zweitor-Matrizen:

	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{G}$	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{H'}$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A'}$
$\boldsymbol{R}$	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{G}}\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{22}}\begin{bmatrix} \det \boldsymbol{H} & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -h'_{12} \\ h'_{21} & \det \boldsymbol{H'} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{21}}\begin{bmatrix} a_{11} & \det \boldsymbol{A} \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{21}}\begin{bmatrix} a'_{22} & 1 \\ \det \boldsymbol{A'} & a'_{11} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{G}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{R}}\begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \det \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{22}}\begin{bmatrix} \det \boldsymbol{H'} & h'_{12} \\ -h'_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{12}}\begin{bmatrix} a_{22} & -\det \boldsymbol{A} \\ -1 & a_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{12}}\begin{bmatrix} a'_{11} & -1 \\ -\det \boldsymbol{A'} & a'_{22} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{H}$	$\frac{1}{r_{22}}\begin{bmatrix} \det \boldsymbol{R} & r_{12} \\ -r_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & \det \boldsymbol{G} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{H'}}\begin{bmatrix} h'_{22} & -h'_{12} \\ -h'_{21} & h'_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{22}}\begin{bmatrix} a_{12} & \det \boldsymbol{A} \\ -1 & a_{21} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{11}}\begin{bmatrix} a'_{12} & 1 \\ -\det \boldsymbol{A'} & a'_{21} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{H'}$	$\frac{1}{r_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -r_{12} \\ r_{21} & \det \boldsymbol{R} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{22}}\begin{bmatrix} \det \boldsymbol{G} & g_{12} \\ -g_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{H}}\begin{bmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{21} & -\det \boldsymbol{A} \\ 1 & a_{12} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{22}}\begin{bmatrix} a'_{21} & -1 \\ \det \boldsymbol{A'} & a'_{12} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{A}$	$\frac{1}{r_{21}}\begin{bmatrix} r_{11} & \det \boldsymbol{R} \\ 1 & r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{21}}\begin{bmatrix} -g_{22} & -1 \\ -\det \boldsymbol{G} & -g_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{21}}\begin{bmatrix} -\det \boldsymbol{H} & -h_{11} \\ -h_{22} & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{21}}\begin{bmatrix} 1 & h'_{22} \\ h'_{11} & \det \boldsymbol{H'} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{A'}}\begin{bmatrix} a'_{22} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{11} \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{A'}$	$\frac{1}{r_{12}}\begin{bmatrix} r_{22} & \det \boldsymbol{R} \\ 1 & r_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{12}}\begin{bmatrix} -g_{11} & -1 \\ -\det \boldsymbol{G} & -g_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{12}}\begin{bmatrix} 1 & h_{11} \\ h_{22} & \det \boldsymbol{H} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{12}}\begin{bmatrix} -\det \boldsymbol{H'} & -h'_{22} \\ -h'_{11} & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}$

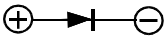
Beschreibungsformen:

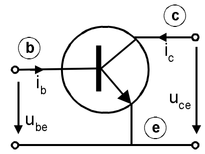
	implizite Darstellung	Parameterdarstellung	explizite Darst.
streng linear	$F=Kern[M\,N]=\left\{\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} \middle\vert\ [M\,N]\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix}=0\right\}$ $Rang[\,M\,N\,]=p$	$F=Bild\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix}=\left\{\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} \middle\vert\ \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix}\cdot\underline{c},\underline{c}\in\mathbb{R}^2\right\}$ $Rang\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix}=p$ Betriebsmatrix: $\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{u}^{(1)} & \underline{u}^{(2)} \\ \underline{i}^{(1)} & \underline{i}^{(2)} \end{bmatrix}$	$\underline{i}=G\,\underline{u}$ $\underline{u}=R\,\underline{i}$
nicht quellenfrei	$F=Kern[\,M\,N\,]+\begin{bmatrix} \underline{u}_0 \\ \underline{i}_0 \end{bmatrix}$	$F=Bild\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \underline{u}_0 \\ \underline{i}_0 \end{bmatrix}$	$\underline{i}=G\,\underline{u}+\underline{i}_g$ $\underline{u}=R\,\underline{i}+\underline{u}_r$ usw.

Zusammenschaltung von Zweitoren:

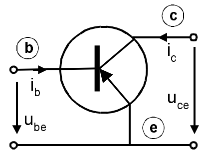
Parallel-schaltung		$\underline{g}_{ges}=\underline{g}_1+\underline{g}_2 \quad G_{ges}=G_1+G_2 \quad R=R_1(R_1+R_2)$
Serien-schaltung		$\underline{r}_{ges}=\underline{r}_1+\underline{r}_2 \quad R_{ges}=R_1+R_2 \quad G=G_1(G_1+G_2)$
Hybride Verschaltung		$\underline{h}_{ges}=\underline{h}_1+\underline{h}_2 \quad \underline{h}'_{ges}=\underline{h}'_1+\underline{h}'_2$ $H_{ges}=H_1+H_2 \quad H'_{ges}=H'_1+H'_2$
Kettenschatung		$\underline{a}_{ges}=\underline{a}_1\cdot\underline{a}_2 \quad A_{ges}=A_1\cdot A_2 \quad A'_{ges}=A'_1\cdot A'_2$ $\quad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix}=\underline{a}_{ges}\begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}=\underline{a}_1\left(\underline{a}_2\begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}\right)$

Transistoren

- Der Strom zur jeweiligen Bezugsklemme kommt nicht vor! (z.B. i_e)
- Diodenrichtung: p  n
- Transistoren sind immer passiv!



npn in Emitterschaltung



pnp in Emitterschaltung

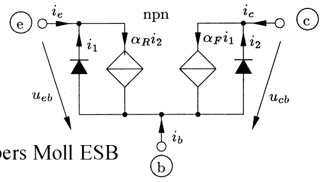
In Emitterschaltung gilt:

$$i_b = I_S\left(\exp\left(\frac{u_{be}}{U_T}\right)-1\right)$$

$$i_c = \beta i_b$$

$$u_{be} = U_T \ln\left(1+\frac{i_b}{I_s}\right)$$

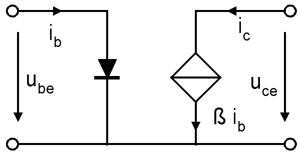
Ersatzschaltungen:



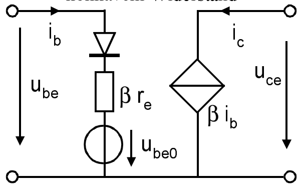
Ebers Moll ESB

$\boxed{u_{cb}>0}$ npn Transistor in Emitterschaltung, Vorwärtsbetrieb!
(pnp: Diode umdrehen! Kleinsignal ESB sind für pnp und npn identisch!)

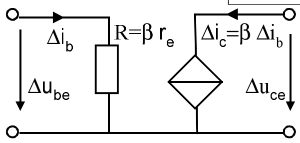
Grossignal ESB I:



ESB II : Stückweise linear mit konkavem Widerstand

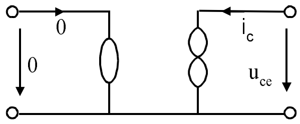


lin. Kleinsignal ESB: $\boxed{u_{be} > 0}$



$\Rightarrow$ $\beta\to\infty$

Dreipolnullor:



Hybridmatrix H der Emitterschaltung:

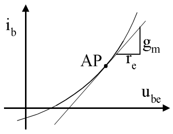
r_e : Eingangswiderstand
β : Stromverstärkung
μ : Spannungsrückwirkung
g : Ausgangsleitwert

$$\begin{bmatrix}\Delta u_{be}\\ \Delta i_c\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} r_e=\dfrac{\Delta u_{be}}{\Delta i_b} & \mu=\dfrac{\Delta u_{be}}{\Delta u_{ce}} \\ \beta=\dfrac{\Delta i_c}{\Delta i_b} & g=\dfrac{\Delta i_c}{\Delta u_{ce}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta i_b\\ \Delta u_{ce}\end{bmatrix}$$

Kenngrößen des Transistors:

- Stromverstärkung: $\boxed{\beta = v_i = \dfrac{i_c}{i_b}}$
- Verlustleistung: $\boxed{P_V = U_{be} I_b + U_{ce} I_c \approx I_c U_{ce}}$
- Eingangswiderstand $r_e = \dfrac{1}{g_m}$: $\boxed{\dfrac{\Delta i_b}{\Delta u_{be}} = \dfrac{g_m}{\beta} \;\Rightarrow\; r_e = \dfrac{\Delta u_{be}}{\Delta i_b} = \dfrac{U_T}{-i_e}}$
  (Transferwiderstand)
- Kleinsignalverstärkung: $\boxed{v_u = \dfrac{\Delta u_{out}}{\Delta u_{in}}}$
  (Spannungsverstärkung)
- Leistungsverstärkung: $\boxed{v_p = v_u \cdot v_i = \beta_F = \dfrac{\Delta u_{out} \cdot \Delta i_{out}}{\Delta u_{in} \cdot \Delta i_{in}}}$
- Kleinsignalleitwert / Steilheit: $g_m = \dfrac{\Delta i_c}{\Delta u_{be}}\Big|_{AP}$

Eingangskennlinie:



Arbeitspunktbestimmung:

- Kirchhoffgleichungen aufstellen (meist $u=u'$, $i=-i'$) (u',i') sind Quellenkenngrößen
- (u',i') eleminieren, durch (u,i) ersetzen
- in Koodinatensystem eintragen, Schnittpunkt der Kennlinien ist AP.

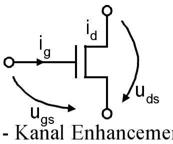
$$\left.\begin{array}{ll} U_{be}=U_0+R_i i_e : & \text{Quellenkennlinie } Q \\ U_{be}=U_0-R_i i_e : & \text{externe Quellenkennlinie } Q^x \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{(LL)}{U_{BE}=0} \Rightarrow \overset{(KS)}{U_0=R_i i_0} \;(bei\, Q^x) \Rightarrow i_0=\frac{R_i}{u_0}$$

$\Rightarrow$ Punkte $(U_0, 0)$ und $(0, i_0)$ einzeichnen und als Gerade verbinden(Q^x)

- Schnittpunkt Q^x mit Transistorkennlinie ist **AP**
- im Eingangskennlinienfeld haben kleine Änderungen der Steigung von Q^x eine große Verschiebung des AP zur Folge!

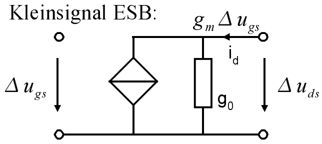
Unipolartransistoren: FET

$i_g = 0$

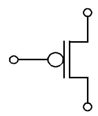


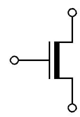
n - Kanal Enhancement

Kleinsignal ESB:



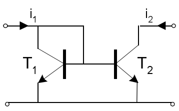
Innenleitwert: $g_0 = \dfrac{\partial i_d}{\partial u_{ds}}\Big|_{AP}$ Steilheit: $g_m = \dfrac{\partial i_d}{\partial u_{gs}}\Big|_{AP}$

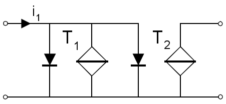

p - Kanal Enhancement


n - Kanal Depletion

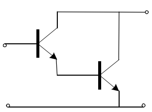
Stromspiegel:

ideal: $u_1 = 0$
$i_1 = i_2$

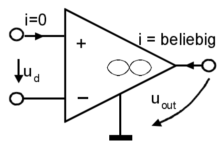




Darlington Transistor:

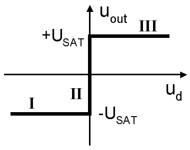


Operationsverstärker

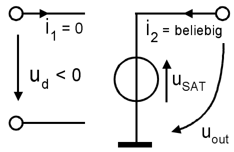


- In den Sättigungsbereichen kennt man u_{out} immer: $u_{out}=\pm U_{Sat}$
- Wird der OpAmp im <u>streng linearen</u> Bereich betrieben, sofort ESB II verwenden!!

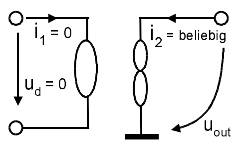
Kennlinie des <u>idealen</u> OpAmps:



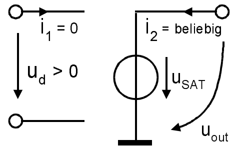
ESB I: $u_d < 0;\ u_{out}=-U_{Sat}$



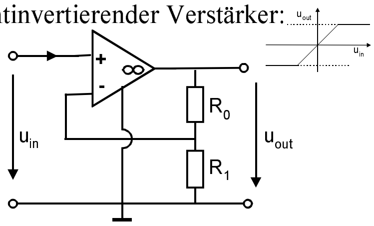
ESB II: $u_d = 0;\ |u_{out}|\leq|U_{Sat}|$



ESB III: $u_d > 0;\ u_{out}=U_{Sat}$



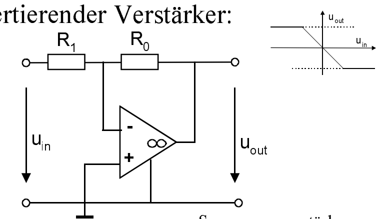
Nichtinvertierender Verstärker:



$$u_{out}=\left(1+\frac{R_0}{R_1}\right)u_{in}$$

Spannungsverstärkung: $v_u=1+\dfrac{R_0}{R_1}$

Invertierender Verstärker:



$$u_{out}=\frac{-R_0}{R_1}u_{in}$$

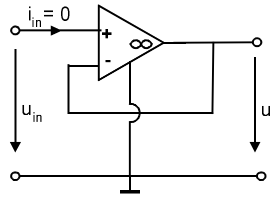
Spannungsverstärkung: $v_u=\dfrac{R_0}{R_1}$

<u>Addierer</u>:

Mehrfacheinkopplung: $u_{out}=-R_0\sum_i\dfrac{u_i}{R_i}$

Spannungsfolger: = Nicht invertierender Verstärker

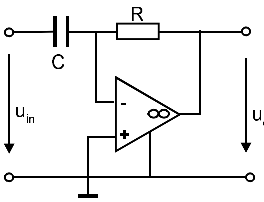
= Impedanzwandler mit $v_u=1$



$u_{out}=u_{in}$ Eingang: nicht belastet $i_{in}=0$

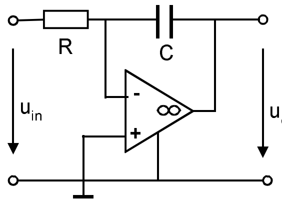
$v_u=1$ Ausgang: hohe Ströme

Differenzierer:



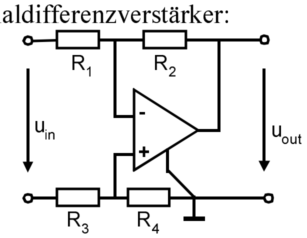
$$u_{out}=-RC\cdot\dot{u}_{in}$$

Integrierer:



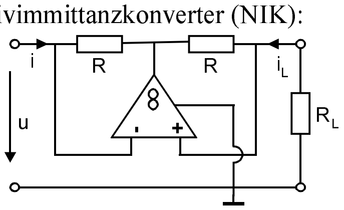
$$u_{out}=-u_c(t_0)-\frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t_1}u_{in}\,dt$$

Potentialdifferenzverstärker:

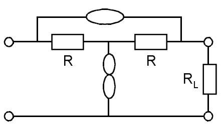


$$u_{out}=\frac{-R_2}{R_1}u_{in}=\frac{-R_4}{R_3}u_{in}\quad \text{Bed. } \frac{R_1}{R_2}=\frac{R_3}{R_4}$$

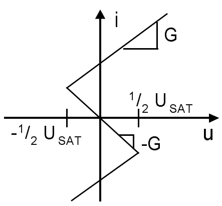
Negativimmittanzkonverter (NIK):



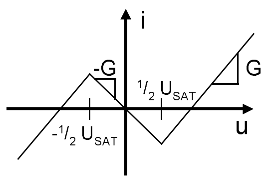
Nullormodell:



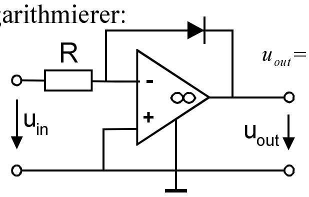
$$u=-R_L i$$



Umpolung des OpAmp:

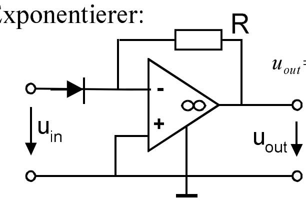


Logarithmierer:



$$u_{out}=-U_T\ln\frac{u_{in}}{R\cdot I_S}$$

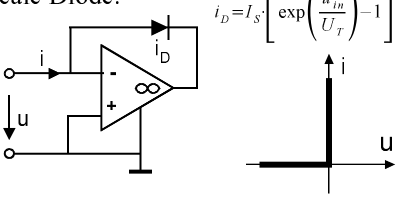
Exponentierer:



$$u_{out}=-R\cdot I_S\cdot\exp\left(\frac{u_{in}}{U_T}\right)$$

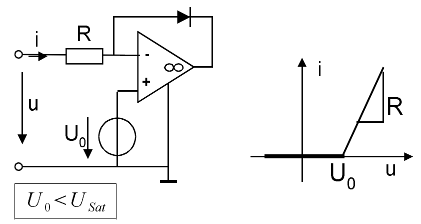
Ideale Diode:

$$i_D=I_S\cdot\left[\exp\left(\frac{u_{in}}{U_T}\right)-1\right]$$



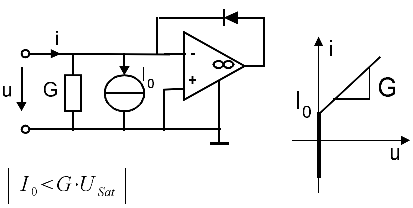
Umgepolte ideale Diode: pn - Diode umpolen

Konkaver Widerstand:



$\boxed{U_0<U_{Sat}}$

Konvexer Widerstand:



$\boxed{I_0<G\cdot U_{Sat}}$

Gyrator:

Parallelschaltung zweier USI <u>oder</u>
Serienschaltung zweier ISU
<u>oder</u>:
Kettenschaltung eines NIK $(k=-1)$
mit einem NII

USU mit $\mu>1$ = Nichtinvertierender Verstärker
$\mu<0$ Invertierendem Verstärker und Spannungsfolger in Kette

ISU mit $r<0$ = Invertiernder Verstärker ohne R_1
$r>0$ zusätzlich invertierenden Verstärker mit $v_u=-1$ nachschalten

Analyseverfahren

A Knoteninzidenzmatrix
B Schleifeninzidenzmatrix

Verbindungsmehrtor:

$$Rang\begin{bmatrix} B' & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix} = Rang[M\,N] = b$$

Jede Knotenpunktsgleichung steht auf jeder Schleifengleichung senkrecht: $A'\,B'^T = 0$

Eigenschaften des Verbindungsmehrtors:
n Knoten (Nodes)
b Anzahl der Kanten (Zweige, Branches) = Anz. der Tore p
Zeit**in**variant, streng linear, verlustlos, reziprok

$\Leftrightarrow$ $\boxed{U^T I = 0}$ Tellegenscher Satz

Jeder Torspannungsvektor des VMT steht auf jedem Torstomvektor des VMT senkrecht

Baumkonzept (= Schleifenanalyse, oder Schnittmengenanalyse)

- Netzwerkgraph zeichnen: Baum muß folgende drei Eigenschaften erfüllen:
  Baum ist ein zusammenhängender Graph - Er enthält alle Knoten - und hat keine Schleifen
  Erst Baumzweige, dann Verbindungskanten fortlaufend nummerieren.
  Es gibt $det(A\,A^T)$ verschiedenen Bäume im Netzwerkgraphen.

  Anzahl der Baumzweige: $(n-1)$
  Anzahl der Verbindungskanten: $s = b-(n-1)$ = Anzahl der linear unabh. Schleifengleichungen
  b Gleichungen

- Aufstellen der linear unabh. Maschengleichungen:
  Eine Schleife enthält nur **eine** Verbindungskante, sonst nur Baumzweige

  $$\Rightarrow \quad B\cdot\underline{u} = [B_b \;\; E_S]\begin{bmatrix}\underline{u}_b \\ \underline{u}_v\end{bmatrix} = 0$$

- Aufstellen der linear unabh. Knotengleichungen:
  Superknoten enthält nur eine Baumkante, sonst nur Verbindungskanten

  $$\Rightarrow \quad [E_{n-1} \;\; -B_b^T]\begin{bmatrix}\underline{i}_b \\ \underline{i}_v\end{bmatrix} = 0$$

vollständige Beschr. des Verbindungsmehrtors:

$$\begin{bmatrix} B_b & E_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-1} & -B_b^T \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\underline{u}_b \\ \underline{u}_v \\ \underline{i}_b \\ \underline{i}_v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Knotenspannungsanalyse:

$$\begin{bmatrix} -A^T & E_b & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{u}_k \\ \underline{u} \\ \underline{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$b+(n-1)$ Gleichungen

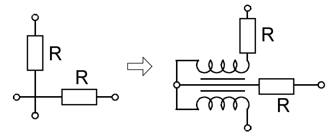
- $(n-1)$ zusätzliche Kanten zwischen Bezugsnoten und übrigen $(n-1)$ Knoten
- diese sind unbeschaltet und dienen ausschließlich als Meßtore.
- Das Aufstellen des Baumes entfällt
- A kann durch Augenschein aufgestellt werden (A = Knoteninzidenzmatrix)
- gut bei stark vermaschten Netzwertken $(b \gg n)$

Maschenstromanalyse:

$$\begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & E_b & -B^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{u} \\ \underline{i} \\ \underline{i}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$(b+s)$ Gleichungen

- nur bei planaren Netzwerken!
- durch ideale Übertrager $(\ddot{u}=1)$ kann ein nichtplanarer Graph in einen planaren Graph überführt werden, dabei steigt die Anzahl der Kanten um zwei pro idealem Übertrager
- gut bei schwach vermaschten Netzwerken $(b \approx n)$



Tableaugleichungen:

$$\begin{array}{c} KVL \\ KCL \\ Nwel. \end{array}\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \\ M & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{u} \\ \underline{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\\underline{e}\end{bmatrix}\begin{array}{c} s \\ (n-1) \\ b \end{array}$$

Gleichungen: $2b$

lin. Netzwerkelemente $\Rightarrow$ $M\,u + N\,i = e$
$\underline{e}$: Erregungsvektor aller unabhängiger Quellen
eindeutige Lösung des Tableaugleichungssystems wenn $det\,T(t_0) \neq 0$

- Knotentableausystem:

$$\begin{array}{c} KVL \\ KCL \\ Nwel. \end{array}\begin{bmatrix} -A^T & E_b & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & M & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{u}_k \\ \underline{u} \\ \underline{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\\underline{e}\end{bmatrix}\begin{array}{c} b \\ (n-1) \\ b \end{array}$$

Gleichungen: $2b+(n-1)$

- Maschentableausystem:

$$\begin{array}{c} KVL \\ KCL \\ Nwel. \end{array}\begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & E_b & -B^T \\ M & N & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{u} \\ \underline{i} \\ \underline{i}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\\underline{e}\end{bmatrix}\begin{array}{c} s \\ b \\ b \end{array}$$

Gleichungen: $2b+s$

- Nichtlineares Tableaugleichungssystem: $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{u} \\ \underline{i}\end{bmatrix} = \underline{0}$ $\quad h(u,i,t) = 0$ je p Gleichungen in 2p Variabelen

Reduzierte Knotenspannungsanalyse / Maschenstromanalyse:

Umformen des Knotentableausystems:

- red. Knotenleitwertsmatrix Y_k

  $\boxed{Y_k = A\,Y\,A^T} = A(-N^{-1}M)A^T$

- Knoten-Stromquellenvektor $\underline{i}_q$:

  $\boxed{\underline{i}_q = -A\,\underline{i}_0}$ $\boxed{Y_k\,\underline{u}_k = \underline{i}_q}$

Y = Kantenleitwertsmatix
$Y_k = (n-1)$ Gleichungen

Umformen des Maschentableausystems:

- Maschenwiderstandsmatrix Z_m

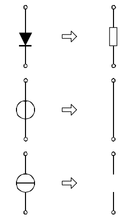
  $\boxed{Z_m = B(-M^{-1}N)B^T}$

- Maschen-Stromquellenvektor $\underline{u}_q$

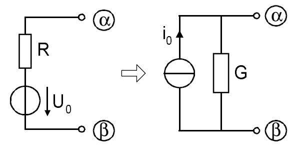
  $\underline{u}_q = -B\,\underline{u}_0 = -B\,M^{-1}\underline{e}$ $\boxed{Z_m\,\underline{i}_m = \underline{u}_q}$

$Z_m = s$ Gleichungen

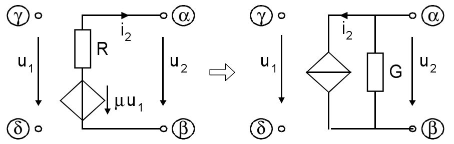
Direktes Aufstellen der reduzierten Knotenleitwertsmatrix (komplexe KSA)



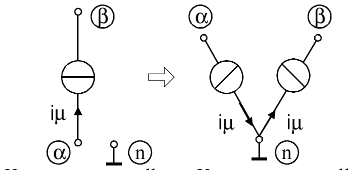
1. Nichtspannungsgesteuerte Elemente erstzen!
2. Schrittweise Knotenleitwertsmatrix Y aufstrellen: $\boxed{Y_k \underline{u_k} = \underline{i_q}}$
   - Bezugsknoten weglassen!
   - komplex $j\,\omega C$ und $1/j\,\omega L$ Im Prinzip wie G und R
3. Gesteuerte Quellen: Steuerleitwerte eintragen.
4. Gyrator einbauen (entsprechende Zeile / Spalte streichen!)
6. Knotenstromquellenvektor $\underline{i_q}$ aufstellen



$G=\frac{1}{R}$ $\quad i_0=U_0\frac{1}{R}$

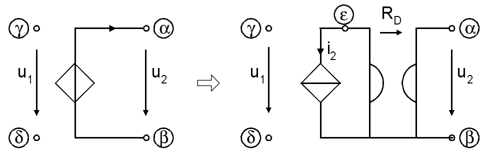


$G=\frac{1}{R}=g_m$ $\quad i_2=-g_m\,\mu\,u_1$



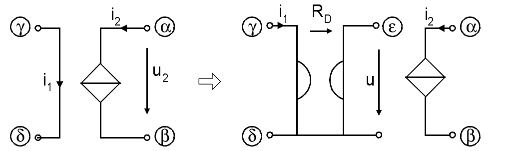
Kantenstromquelle -> Knotenstromquelle

USU
⇒ USI:



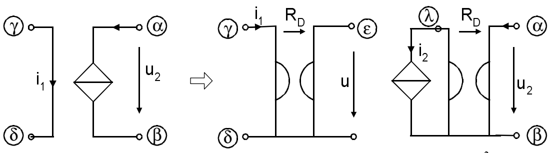
$u_2=\mu\,u_1$ $\quad i_2=-g_m\,\mu\,u_1$ $\quad g_m R_D=1$

ISI:
⇒ USI:



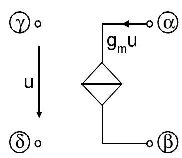
$i_2=\beta\,i_1$ $\quad u=R_D\,i_1$ $\quad g_m R_D=1$ $\quad i_2=\beta\,g_m\,u$

ISU
⇒ USI



$u_2=\beta\,i_1$ $\quad u=R_D\,i_1$ $\quad g_m R_D=1$ $\quad i_2=g_m\,u$ $\quad u_2=-g_m R_D^2\,i_1$

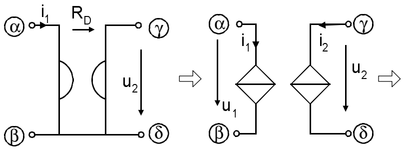
USI:



$$Y_v=\begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\gamma & \delta\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \cdots\ g_m & -g_m\ \cdots \\ \cdots\ -g_m & g_m\ \cdots \\ \vdots & \vdots \end{array}\right]\end{array}$$

Stromrichtung beachten !!!

Gyrator:

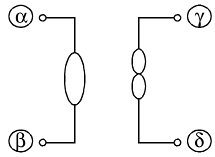


$$\begin{array}{c|cccc} & \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \hline \gamma & & & G & -G \\ \delta & & & -G & G \\ \alpha & -G & G & & \\ \beta & G & -G & & \end{array}$$

$i_1=G_D\,u_2$ $\quad i_2=-G_D\,u_1$ $\quad G_D=\frac{1}{R_D}$

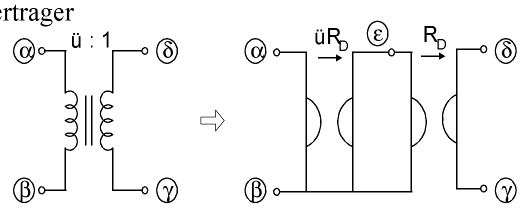
Nullor (für OpAmp):

- Nullator: Spalten addieren
- Norator: Zeilen addieren
- falls mit Masse verbunden:
  Spalte bzw. Zeile streichen!

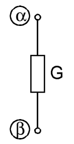


Nullator Norator

Idealer Übertrager



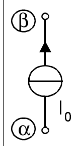
Widerstand



$$Y_v=\begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\alpha & \beta\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \cdots\ G & -G\ \cdots \\ \cdots\ -G & G\ \cdots \\ \vdots & \vdots \end{array}\right]\end{array}$$

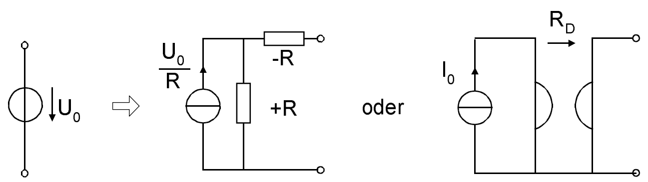
nur Leitwerte in Knotenleitwertsmatrix!

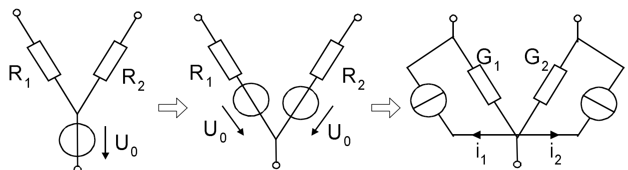
Stromquelle



$$\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}\left[\begin{array}{c} \vdots \\ \cdots\ -i_0\ \cdots \\ \cdots\ i_0\ \cdots \\ \vdots \end{array}\right]$$

im Quellenvektor!
was in Knoten <u>rein</u>fließt <u>positiv</u>
was rausfließt negativ



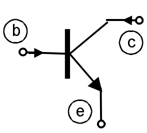


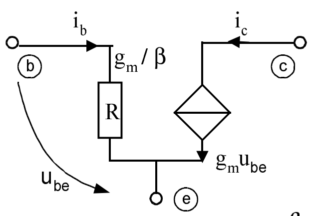
$G_1=\frac{1}{R_1}$ $\quad G_2=\frac{1}{R_2}$ $\quad i_1=\frac{U_0}{R_1}$ $\quad i_2=\frac{U_0}{R_2}$

Transistor:

$\beta=\frac{i_c}{i_b}$

$g_m=\frac{\partial i_c}{\partial u_{be}}$





$i_c=\beta\cdot i_b=\frac{\beta\cdot u_{be}}{R}$

	b	c	e
b	(g_m/β)	0	$-(g_m/\beta)$
c	g_m	0	$-g_m$
e	$-(g_m/\beta)-g_m$	0	$(g_m/\beta)+g_m$

b			
c			
e			

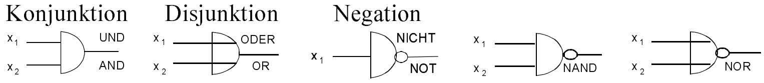
Logik

De Morgansche Gesetze:

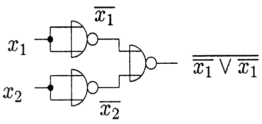
$\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$

$\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$

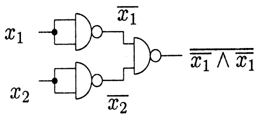
Konjunktion — Disjunktion — Negation



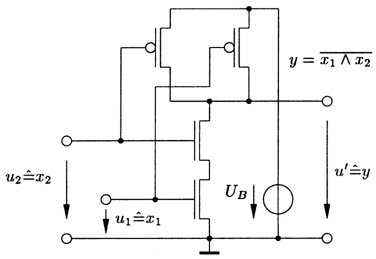
$y = x_1 \wedge x_2$ — $y = x_1 \vee x_2$ — $y = \overline{x}$ — $y = \overline{(x_1 \wedge x_2)}$ — $y = \overline{(x_1 \vee x_2)}$



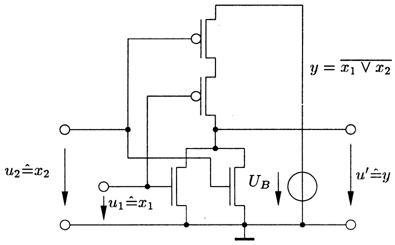
AND mit NOR



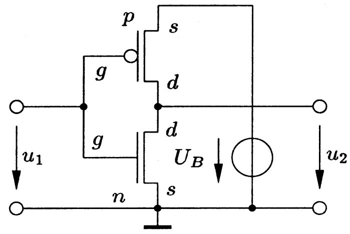
OR mit NAND



CMOS - NAND

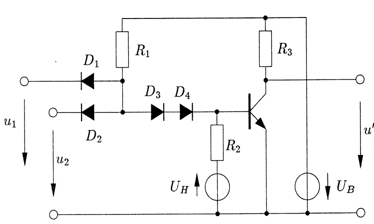


CMOS - NOR

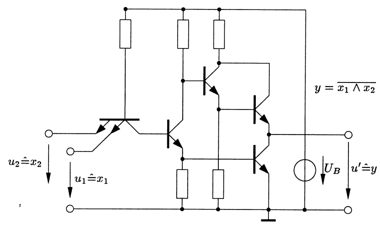


CMOS - Inverter

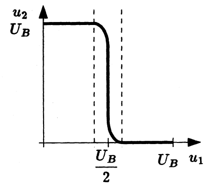
CMOS AND / OR : p- und n- Kanal Transistoren vertauschen!



DTL - NAND

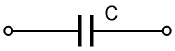
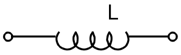


TTL - NAND



CMOS - Übertragungscharakteristik

Reaktive Netzwerkelemente

	allgemein	linear	komplex
Kapazität  $[C]=\frac{C}{V}=\frac{As}{V}=F$ $\quad [Q]=C=As$	$q(t)=q_0+\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,d\tau$ $i(t)=\frac{\partial q(t)}{\partial t}=\dot{q}$	$q(t)=C\,u(t)$ $i(t)=C\,\dot{u}(t)$	$I=Y\,U$ $\quad Z=\frac{1}{j\,\omega C}$ $Y=j\,\omega C$
Induktivität  $[L]=\frac{Wb}{A}=\frac{Vs}{A}=H$ $\quad [\Phi]=Wb=Vs$	$\phi(t)=\phi_0+\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau$ $u(t)=\frac{\partial \phi(t)}{\partial t}=\dot{\phi}$	$\phi(t)=L\,i(t)$ $u(t)=L\,\dot{i}(t)$	$U=Z\,I$ $\quad Z=j\,\omega L$ $Y=\frac{1}{j\,\omega L}$

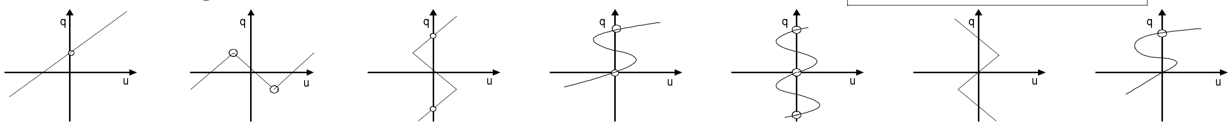
- Kapazität des Plattenkondensators: $C=\epsilon_0\frac{A}{d}$ - Memristor: $u_M(t)=\dot{\Phi}(t)$ $\quad i_M(t)=\dot{q}(t)$

Energiebetrachtungen:

- ideale Reaktanzen sind verlustlos. Außer ihre Kennlinie ermöglicht zwei verschiedene Wege um von einem Punkt. P_1 zu P_2 zu gelangen. (Hysterese - Kennlinie)
- im stationären Fall ist der Leistungsfluß Null. $u(t)=const \quad i(t)=const \;\Rightarrow\; i=\partial q/\partial t=0 \;\Rightarrow\; p=u\cdot i=0$
- Energieänderung: $\boxed{W_C(t_1,t_2)=W_C(q_1,q_2)=\int_{q_1}^{q_2} u(q)\,dq=\frac{1}{2C}\left(q_2^2-q_1^2\right)=\frac{C}{2}\left(u_2^2-u_2^2\right)}$ Flächen abschnittsweise berechnen!
- gespeicherte Energie: $\boxed{E_C(q_1)=E_C(u_1)=\frac{1}{2C}q_1^2=\frac{1}{2}C\,u_1^2}$ $\quad \boxed{E_L(\phi_1)=E_L(i_1)=\frac{1}{2L}\phi_1^2=\frac{1}{2}L\,i_1^2}$
- Relaxpunkte: (Ruhepunkte) energetisch tiefste Punkte der Kennlinie
  Kandidaten für Relaxpunkte: Knick, Wendestelle (Sinus), Schnittpunkt mit Koordinatenachse
- Energiebilanz: $W_C>0 \;\Leftrightarrow\; q$ steigt und $u>0$ oder q fällt und $u<0$

Für **L**: q durch Φ und u durch i ersetzen

Beispiele für Relaxationspunkte bei C:



wegen Symmetrie

Kein RP; Kennlinie verläuft im II u. IV Qdr. Energie beliebig groß

Ursprung kein RP weil nicht symmetrisch!

$W_C>0 \;\Rightarrow$ System nimmt Energie auf

Mehrfachkarakter der Netzwerkelemente: $f_R(u,i)=0$; $f_C(u,q)=0$; $f_L(i,\Phi)=0$; $f_M(\Phi,q)=0$

- Nullator, Norator, Leerlauf und Kurzschluss sind Kapazitiv, induktiv, resistiv und memristiv
- Spannungsquellen sind resistiv und kapazitiv
- Stromquellen sind resistiv und induktiv

Zusammenschaltung reaktiver Eintore:

- Parallelschaltung: Funktionsadition in der $u-q$ - Ebene $C_p=C_1+C_2$ $\quad U_C=U_1=U_2$ $\quad L_p=L_1\|L_2=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}$ $\quad i_L=i_1+i_2$
- Serienschaltung: Funktionsadition in der $q-u$ - Ebene $C_s=C_1\|C_2=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ $\quad U_C=U_1+U_2$ $\quad L_s=L_1+L_2$ $\quad i_L=i_1=i_2$
- In einem rein kapazitiven oder rein induktiven Netzwerken kann man rechnen wie bei einem resistiven Netzwerk gleicher Struktur, wenn man C wie G und L wie R behandelt.

Umwandlung resistiver Beschreibung in reaktive Beschreibungsform:

- Bedingungen: - implizite resistive Beschreibung $\underline{f_R}(\underline{u},\underline{i})=0$ zerfällt in zwei unabhängige Funktionen $\underline{f_1}(\underline{u})=0$ und $\underline{f_2}(\underline{i})=0$
  - eine der zwei Funktionen muß streng linear sein! $\underline{f_1}(\underline{u})=M\,\underline{u}\overset{!}{=}0$ oder $\underline{f_2}(\underline{i})=N\,\underline{i}\overset{!}{=}0$
- durch Integration über die Zeit erhält man: $\underline{f_1}(\phi)=M\,\underline{\phi}=0$ bzw. $\underline{f_2}(\underline{q})=N\,\underline{q}=0$

Reaktive Beschreibung $\boxed{\underline{f_C}(\underline{u},\underline{q})=\begin{bmatrix}\underline{f_1}(\underline{u})\\ \underline{f_2}(\underline{q})\end{bmatrix}=0}$ bzw. $\boxed{\underline{f_L}(\underline{i},\underline{\phi})=\begin{bmatrix}\underline{f_1}(\underline{\phi})\\ \underline{f_2}(\underline{i})\end{bmatrix}=0}$

Dualwandlung zwischen Reaktanzen:

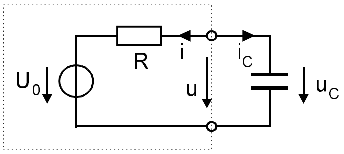
Kapazität und Induktivität sind zueinander duale Klassen von Eintoren.

$q=\frac{1}{R_d}\phi$ $\quad u=i\cdot R_d$ $\quad \boxed{C=\frac{L}{R_d^2}}$ $\qquad \Phi=q\,R_d$ $\quad i=\frac{u}{R_d}$ $\quad \boxed{L=C\,R_d^2}$

Schaltungen ersten Grades

Lineare zeit***in***variante Schaltung:

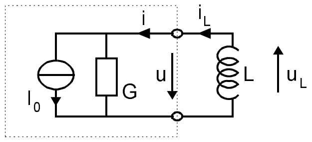
Eintorbeschaltung mit Helmholz / Thévenin (C) bzw. Mayer / Norton (L) :



$i_C = -i$

$i_C = C \cdot \dot{u}_C$

$\boxed{u_C(t_\infty) = U_0}$



$u_L = -u$

$u_L = L \cdot \dot{i}_L$

$\boxed{i_L(t_\infty) = I_0}$

Zeitkonstante $\boxed{\tau = R \cdot C}$ Zeitkonstante $\boxed{\tau = G \cdot L}$

Aus Graph ablesen: - Aus der Steigung des Graphen: $R = \dfrac{\Delta u}{\Delta i}$ bzw. $G = \dfrac{\Delta i}{\Delta u}$

- Kennlinie verlängern bis zum Schnittpunkt mit der $u-$ bzw. $i-$ Achse $\Rightarrow$ U_0 bzw. I_0

C durch LL ersetzen $\Rightarrow$ $u_C(t_\infty) = u$

C durch Spannungsquelle $u_C(t_0)$ ersetzen $\Rightarrow$ $u = u(t_0)$

L durch KS ersetzen $\Rightarrow$ $i_L(t_\infty) = i$

L durch Stromquelle $i_L(t_0)$ ersetzen $\Rightarrow i(t_0)$

Strom-, Spannungsverläufe bei konstanter Erregung:

- Differenzialgleichung 1. Grades: $\boxed{\dot{u}_C = \dfrac{-1}{RC} u_C + \dfrac{1}{RC} u_0}$ $\boxed{\dot{i}_L = \dfrac{-1}{GL} i_L + \dfrac{1}{GL} i_0}$

- Lösung:

$$u_C(t) = u_C(t_\infty) + \left[u_C(t_0) - u_C(t_\infty)\right] \, exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

$$i_C(t) = C\left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot \left[u_C(t_0) - u_C(t_\infty)\right] \, exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

$$i_L(t) = i_L(t_\infty) + \left[i_L(t_0) - i_L(t_\infty)\right] \, exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

$$u_L(t) = L\left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot \left[i_L(t_0) - i_L(t_\infty)\right] \, exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

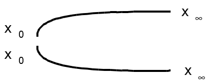
Stromverlauf bei C, Spannungsverlauf bei L SPRINGT ! (ist unstetig)

$\Rightarrow$ Werte an Intervallgrenze extra berechnen! $i_C-(t_1)$, $i_C+(t_1)$, $u_L-(t_1)$, $u_L+(t_1)$

- Skizze des Zeitverlaufs:

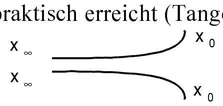
stabiler Fall $\tau > 0$

- Tangente an $x(t)$ in (t_0, x_0) geht durch $(t_0 + \tau, x_\infty)$
- $x(t)$ hat sich nach τ: $0{,}63 \cdot (x_0 - x_\infty)$ in Richtung x_∞ bewegt
- nach $7 \cdot \tau$ ist x_∞ praktisch erreicht (Tangente)
- $x_\infty > x_0$
- $x_\infty < x_0$



instabiler Fall $\tau < 0$

- Tangente an $x(t)$ in (t_0, x_0) geht durch $(t_0 - |\tau|, x_\infty)$
- Nach $|\tau|$ ist $x(t)$ um $1{,}72 \cdot |x_0 - x_\infty|$ angewachsen
- $x(t)$ hat sich nach τ: $0{,}63 \cdot (x_0 - x_\infty)$ in Richtung x_∞ bewegt
- nach $7 \cdot \tau$ ist x_∞ praktisch erreicht (Tangente)
- $x_\infty < x_0$
- $x_\infty > x_0$



$x_\infty = x(t_\infty)$: Gleichgewichtszustand (Fixpunkt)

$x_0 = x(t_0)$: Anfangswert

Strom- und Spannungsverläufe bei allgemeiner Erregung

($u_0(t)$ bzw $i_0(t)$ sind beliebige Funktionen der Zeit)

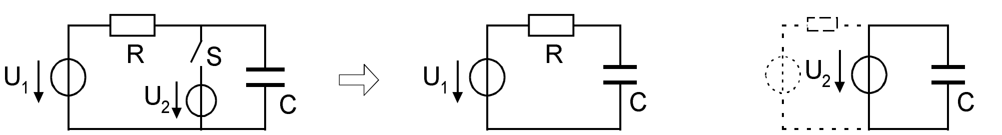
$$u_C(t) = u_C(t_0) \, exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} u_0(t') \, exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt'$$

$$i_L(t) = i_L(t_0) \, exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} i_0(t') \, exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt'$$

zero input response + zero state response

Lineare Zeitvariante Schaltung:

Schalter wird zum Zeitpunkt T geschlossen offener Schalter: geschlossener Schalter:



$t \epsilon [t_0, T[$ $U_C(t_\infty) = U_1$

$t \epsilon [T, \infty[$ $U_C(t) = U_2$

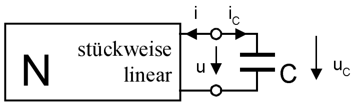
- 2 verschiedene $u(t_\infty)$ und 2 verschiedene τ
- sonst reelle Vorgehensweise wie oben!

Stabilität: passiv $\Rightarrow$ stabil aktiv $\Rightarrow$ instabil (vgl. stückweise lineare Schaltungen)

Stückweise lineare Schaltungen

<u>Dynamischer Pfad</u>:

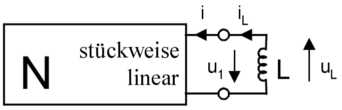
C



$i=-C\cdot\dot{u}$

- Kennlinie von N in *u*-*i*-Diagramm einzeichen
- GGP einzeichen: Punkte wo $i=0$
- Richtung des dynamischen Pfades:
  solange $i>0$ $\Rightarrow$ u muß fallen

L



$u=-L\cdot\dot{i}$

- Kennlinie von N in *u*-*i*-Diagramm einzeichen
- GGP einzeichen: Punkte wo $u=0$
- Richtung des dynamischen Pfades:
  solange $u>0$ $\Rightarrow$ i muß fallen

<u>Zeitdauer um Kennlinie zu durchlaufen</u> (Stückweise Lineare Schaltung)

- einzelne ESBs zeichnen und Gleichungen aufstellen, τ berechnen
- DGL nach t auflösen:
  $u(t_0)=$ Startwert
  $u(t_1)=$ Endpunkt des Astes
  $u(t_\infty)=$ gedachter Schnittpunkt des Astes mit u - Achse.

$$\boxed{t_1 = t_0+\tau\cdot\ln\frac{u_C(t_0)-u_C(t_\infty)}{u_C(t_1)-u_C(t_\infty)}}$$

bei L:

$$\boxed{t_1 = t_0+\tau\cdot\ln\frac{i_L(t_0)-i_L(t_\infty)}{i_L(t_1)-i_L(t_\infty)}}$$

- nächster Ast: t_1 für t_0 , neues τ , neue $u(t_0)$, $u(t_1)$, $u(t_\infty)$
- Sprünge:
  - Sprünge kosten keine Zeit
  - bei C : Spannung konstant, Strom springt
  - bei L : Strom konstant, Spannung springt
  - Periodendauer (Relaxationsoszilator): $T=t_3-t_1$ Frequenz: $f=\frac{1}{T}$
- Symmetrie der Kennlinie ausnutzen: $T=2\,t_2$ $t_1=t_2$
- Vorsicht: Zählpfeilrichtung beachten! bei C : $i_C=-i$
  bei L : $u_L=-u$

<u>Toter Punkt</u>:

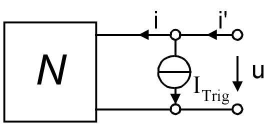
- ist <u>kein</u> Gewichtszustand <u>und</u> es existiert <u>kein</u> Ausweg entlang der Kennlinie
- dynamischer Pfad kann durch <u>Sprungregel</u> fortgesetzt werden:
  - bei C : Punkt auf Kennlinie suchen mit gleicher Spannung
  - bei L : Punkt auf Kennlinie suchen mit gleicher Stromstärke
  - P muß <u>einziger</u> Punkt mit dieser Eigenschaft sein.

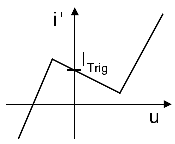
  $\Rightarrow$ periodischer Verlauf von Strom und Spannung!

<u>Triggerung</u>:

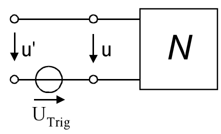
- Durch Triggerimpuls wandert man von einem stabilen zu einem anderen stabilen GGP. Der Triggerimpuls verschiebt die Kennlinie so, daß der Betriebspunkt von einem GGP in den anderen wandern kann.
- i_{Trig} oder u_{Trig} muß groß genug sein, damit Zwischenzustände erreicht werden, es dürfen aber keine neuen Totpunkte entstehen
- Δt muß lang genug sein, damit evtl. Zwischenpunkte durchlaufen werden.

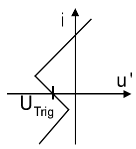
<u>Triggern mit Strom</u> (bei C) $\boxed{i'=i+I_{Trig}}$





<u>Triggern mit Spannung</u> (bei L) $\boxed{u'=u-U_{Trig}}$



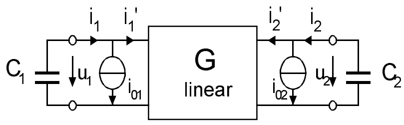


Lineare Schaltungen zweiten Grades

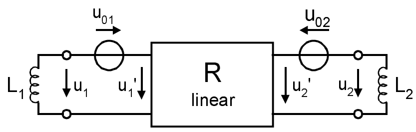
$$\boxed{\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{v}}$$

<u>Zustandsgleichungen aufstellen</u>:

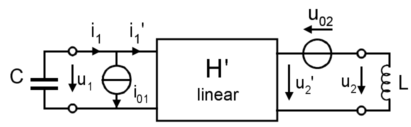
1. Schaltung umzeichnen, so daß Reaktanzen an Toren eines resistiven Zweitors liegen.
2. ESB`s , je nach Reaktanztyp:



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = H' \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}$$

3. Matrixelemente berechnen; in Abhängigkeit von unabhängigen Torgrößen und Erregungsquellen (innen)

① $i_1 = g_1(u_1, u_2, u_0, i_0) = -C\,\dot{u}_1$

$i_2 = g_2(u_1, u_2, u_0, i_0) = -C\,\dot{u}_2$

② oder G aufstellen

① $u_1 = r_1(i_1, i_2, u_0, i_0) = -L\,\dot{i}_1$

$u_2 = r_2(i_1, i_2, u_0, i_0) = -L\,\dot{i}_2$

② oder R aufstellen

① $i_1 = h_1(u_1, i_2, u_0, i_0) = -C\,\dot{u}_1$

$u_2 = h_2(u_1, i_2, u_0, i_0) = -L\,\dot{i}_2$

② oder H' aufstellen

4. Zustandsmatrix A ermitteln

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \cdot \underline{G}$$ oder aus ①

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \underline{R}$$ oder aus ①

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \underline{H'}$$ oder aus ①

5. Einkoppelmatrix B bestimmen

$\underline{v} = \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$ ist Vektor aller inneren Erregungen; T ist Transformationsmatrix

Wenn die Erregung gleich 0, handelt es sich um ein <u>autonomes System</u>

$$\begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix} = \underline{T}\,\underline{v} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \cdot \underline{T}$$

$$\begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix} = \underline{T}\,\underline{v} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \underline{T}$$

$$\begin{bmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix} = \underline{T}\,\underline{v} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \underline{T}$$

6. Zustandsgleichung aufstellen: Zustandsvektor $\underline{x}$:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}$$

<u>Ausgangssignal</u>: $\boxed{y = \underline{c}^T \underline{x} + \underline{d}\,\underline{v}} = u_{out}$ mit:

$\underline{c}^T =$ Auskoppelvektor
$\underline{d} =$ Durchgriff der Erregung
$\underline{v} =$ Erregungsvektor

Lösen der Zustandsgleichung

<u>EW´s berechnen</u>: $\lambda_{1,2}=\frac{T}{2}\pm\sqrt{\frac{T^2}{4}-\Delta}$ $\quad T=a_{11}+a_{22}=$ Spur A $\quad \Delta=det\,A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

$det(A-\lambda E)\overset{!}{=}0$ $\quad A=$ Zustandsmatrix = Systemmatrix

man wählt: $\boxed{|\lambda_1|<|\lambda_2|}$
==> q_2 ist schneller EV

<u>EV´s berechnen</u>: $(A-\lambda_1 E)\underline{q_1}\overset{!}{=}0$ $\quad (A-\lambda_2 E)\underline{q_2}\overset{!}{=}0$

<u>Zeitkonstante berechnen</u>: $\tau=\frac{-1}{\lambda}$

<u>Homogenen Zustandsgleichung ohne Erregung</u>: $\boxed{\underline{\dot{x}}(t)=A\,\underline{x}(t)}$ $\quad v(t)=0$

1. <u>Fall</u>: $\lambda_1\neq\lambda_2\in\mathbb{R}$ $\quad \boxed{\underline{x}(t)=c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{q_1}+c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{q_2}}$ $\quad c_{1,2}$ mit Anfangsbedingung bestimmen : $x(0)=c_1\underline{q_1}+c_2\underline{q_2}$

2. Fall: $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ $\quad \underline{x}(t)=e^{\lambda t}\left[E+(A-\lambda E)t\right]\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$

3. Fall: $\lambda_1=\overline{\lambda_2}=\lambda\in\mathbb{C}$ $\quad \underline{x}(t)=c_1 Re(e^{\lambda t}\underline{q})+c_2 Im(e^{\lambda t}\underline{q})$

$\boxed{\underline{x}(t)=c_1 e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t)\underline{q_r}-\sin(\beta t)\underline{q_i}\right]+c_2 e^{\alpha t}\left[\sin(\beta t)\underline{q_r}+\cos(\beta t)\underline{q_r}\right]}$ $\quad (\lambda=\alpha+j\beta,\ \alpha=$ Dämpfung)

<u>Homogenen Zustandsgleichung</u> (Transformation auf Normalform)

1. Fall: $\lambda_1\neq\lambda_2$

$Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}$, Modalmatrix: $Q=\left[\underline{q_1},\underline{q_2}\right]$ $\quad \boxed{\underline{\xi_0}=Q^{-1}\underline{x_0}}$ bestimmen

Normalform: $\dot{\underline{\xi}}=\Lambda\underline{\xi}$ $\Rightarrow$ $\underline{\xi}(t)=e^{\Lambda t}\underline{\xi_0}$

Lösung: $\boxed{\underline{\xi}(t)=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\xi_{01}\\e^{\lambda_2 t}\xi_{02}\end{bmatrix}}$ $\quad$ Rücktransformation: $\underline{x}(t)=Q\underline{\xi}(t)$

2. Fall: $\lambda_1=\lambda_2$ Transformation auf Jordan-Normalform

Transformation $\xi_0=Q^{-1}x_0$ kann nicht ausgeführt werden, da Q nicht mehr invertierbar ist.

$J=\begin{bmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{bmatrix}$ $\quad \underline{\xi_0}=Q^{-1}\underline{x_0}$ $\quad Q'=\begin{bmatrix}-a_{12}&-a_{12}\\\frac{a_{11}-a_{12}}{2}&\frac{a_{11}-a_{12}}{2}-1\end{bmatrix}$

Lösung: $\boxed{\underline{\xi}(t)=e^{Jt}\underline{\xi_0}=\begin{bmatrix}e^{\lambda t}&t\,e^{\lambda t}\\0&e^{\lambda t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_{01}\\\xi_{02}\end{bmatrix}}$ $\quad$ Rücktransformation $x(t)=Q'\underline{\xi}(t)$

3. Fall: $\lambda_1=\lambda_2^*=\overline{\lambda_2}=(\alpha\pm\beta)\in\mathbb{C}$ Transformation auf reellwertige Normalform

Komplexwertige Normalform: $\Lambda=\begin{bmatrix}\alpha+j\beta&0\\0&\alpha-j\beta\end{bmatrix}$

Reelwertige Normalform: $\Lambda'=\begin{bmatrix}\alpha&-\beta\\\beta&\alpha\end{bmatrix}$ $\quad Q=\left[\underline{q},\underline{q}^*\right]$; $Q'=\left[\underline{q_r},-\underline{q_i}\right]$

$\underline{x}=Q\underline{\xi}\Leftrightarrow\underline{x}=Q'\underline{\xi}'$ $\quad \boxed{\underline{\xi}'=Q'^{-1}Q\underline{\xi}=\begin{bmatrix}1&1\\-j&j\end{bmatrix}\underline{\xi}}$ $\quad$ ausführlich: $\xi_1'=\xi_1+\xi_2=2Re(\xi)$

$\xi_2'=-j(\xi_1-\xi_2)=2Im(\xi)$

<u>Autonome Zustandsgleichung</u> (Zurückführen auf ein hom. System) $\boxed{\underline{\dot{x}}(t)=A\,\underline{x}(t)+B\,\underline{v_0}}$ $\quad v_0=const$

1. Fall: <u>Wenn A invertierbar</u> $\Rightarrow$ Koordinatentransformation: $\underline{x'}=\underline{x}-\underline{x_\infty}$; $\underline{\dot{x}'}=\underline{\dot{x}}$; $\underline{x_\infty}=-A^{-1}B\,\underline{v_0}$

$\Rightarrow$ homogene DGL: $\boxed{\underline{\dot{x}'}=A\,\underline{x'}}$ $\Rightarrow$ obiger Lösungsansatz

2. Fall: $\boxed{\underline{x}=\underline{x}(hom)+\underline{x}(t_\infty)}$

entspricht einer Verschiebung des Ursprungs in $\underline{x}(t_\infty)$ **!**

$\underline{x}(t_\infty)=-A^{-1}B\,\underline{v_0}$ ist stationärer Endwert im stabilen Fall

$\underline{x}(hom)$ ist homogene Lösung

Inverse Matrix:

$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{22}&a_{22}\end{bmatrix}$ $\quad \boxed{A^{-1}=\frac{1}{det\,A}\begin{bmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{bmatrix}}$

Zustandsgleichung mit allgemeiner (zeitabhängiger) Erregung:

a) allgemeine Form: $\dot{\underline{x}}(t)=A\,\underline{x}(t)+B\,\underline{v}(t)$

b) Transformation: $\boxed{\dot{\underline{\xi}}=\Lambda\,\underline{\xi}+Q^{-1}B\,\underline{v}=\Lambda\,\underline{\xi}+\underline{v}'}$ wobei $\xi=Q^{-1}x \quad \Lambda=Q^{-1}A\,Q \quad v'=Q^{-1}B\,v \quad Q=\left[q_1|q_2\right]$

c) Lösung: $\boxed{\underline{\xi}(t)=e^{\Lambda t}\underline{\xi}_0+\int_0^t e^{\Lambda(t-t')}\underline{v}'(t')\,dt'}$

zero input resopnse + zero state response

Ausführlich:

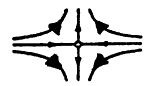
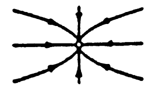
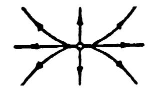
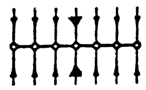
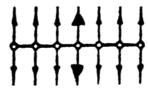
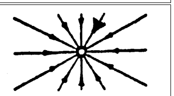
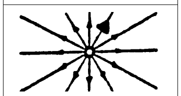
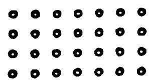
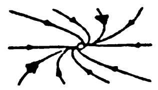
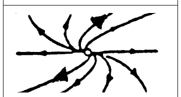
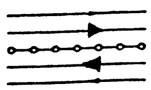
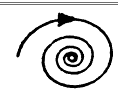
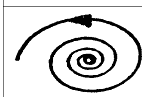
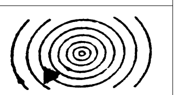
$$\xi_1(t)=e^{\lambda_1 t}\xi_{01}+\int_0^t e^{\lambda_1(t-t')}v_1{}'(t')\,dt'$$

$$\xi_2(t)=e^{\lambda_2 t}\xi_{02}+\int_0^t e^{\lambda_2(t-t')}v_2{}'(t')\,dt'$$

- Ein System ist stabil, wenn gilt: $Re(\lambda_i)<0$ da dann gilt: $\lim_{t\to\infty} x(t)=\underline{o}$
- Im Komplexen ist die Richtung von $\underline{q}_r$ nach $-q_i$ in der $(\xi_1{}', \xi_2{}')$ Ebene immer im Gegenurzeigersinn
- Um ein instabiles System zu erhalten ist mindestens ein aktives Element nötig.

d) Rücktransformation des Lösungsvektors ξ in unsprünglichen Vekror $\underline{x}$: $\boxed{\underline{x}=Q\,\underline{\xi}}$

Lösungsbahnen des DGL - Systems $\dot{x}=A\,x$ im $\mathbb{R}^2$

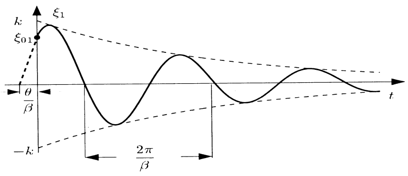
	Matrix A	Eigenwerte	Art von $x=0$	Bezeichnung	Bahnen
1	$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$	$\lambda_1<0<\lambda_2$	instabil	Sattelpunkt	
2	$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$	$\lambda_1<\lambda_2<0$	asymtotisch stabil	Knoten 2. Art	
3		$0<\lambda_1<\lambda_2$	instabil		
4	$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$	$\lambda_1=0$ $\lambda_2<0$	stabil	Gerade von Ruhelagen	
5		$\lambda_1=0$ $\lambda_2>0$	instabil		
6	$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$	$\lambda<0$	asymtotisch stabil	Knoten 1. Art	
7		$\lambda>0$	instabil		
8	$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$\lambda=0$	stabil	Ebene von Ruhelagen	
9	$\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$	$\lambda<0$	asymtotisch stabil	Knoten 3. Art	
10		$\lambda>0$	instabil		
11	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	$\lambda=0$	instabil	Gerade von Ruhelagen	
12	$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$	$\alpha<0$ $\beta\neq0$	asymtotisch stabil	Strudelpunkt	
13		$\alpha>0$ $\beta\neq0$	instabil		
14	$\begin{pmatrix}0 & -\beta\\ \beta & 0\end{pmatrix}$	$\alpha=0$ $\beta\neq0$	stabil	Wirbelpkt. Zentrum	

Zeitantwort:

zu 1. schwach gedämpfte Schwingung

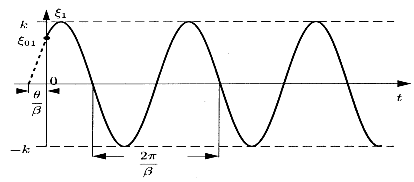
Zeitverlauf $\xi_1(t)=k\,e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta) \quad (\alpha<0)$

Kreisfrequenz $\beta=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$



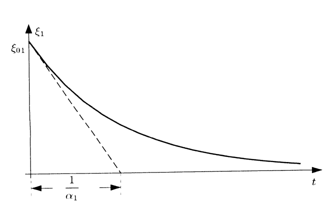
zu 3. ungedämpfte Schwingung

$\xi_1(t)=k\cdot\cos(\beta t+\theta) \quad \beta^2=\omega_0^2$



zu 5. stark gedämpfte Schwingung

$\xi_1(t)=\xi_{01}\,e^{\alpha t} \quad (\alpha<0)$



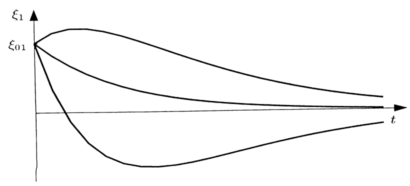
$\tau_1=-\frac{1}{\lambda_1}$

$\tau_2=-\frac{1}{\lambda_2}$

zu 9. aperiodisch gedämpfte Schwingung

$\xi_1(t)=\left(\xi_{01}+\xi_{02}\,t\right)e^{\alpha t} \quad (\alpha<0)$

abhängig von ξ_{02}



Nichtlineare dynamische Schaltungen

Zustandsgleichungen aufstellen:

- Zustandsvariable auswählen:

C :	spannungsgesteuert	$\Rightarrow u_C$!
	Ladungsgesteuert	$\Rightarrow q$
	beides	$\Rightarrow u_C$
bei L :	stromgesteuert	$\Rightarrow i_L$!
	flußgesteuert	$\Rightarrow \Phi$
	beides	$\Rightarrow i_L$

- wenn die Reaktanzen von keiner Größe gesteuert werden, gibt es keine Beschreibung!!
- allgemeine Form: $\boxed{\begin{matrix}\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)\\ \dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}i_C=\cdots=C\,\dot{u}_C\\ u_L=\cdots=L\,\dot{i}_L\end{matrix}}$ Aus nichtlinearer Reaktanz: $i_C=\dot{q}$ bzw. $u_L=\dot{\Phi}$

Gleichgewichtspunkte $x_1(t_\infty)$, $x_2(t_\infty)$ bestimmen:

- durch Zustandsgleichungen $\boxed{\dot{x}_1=\dot{x}_2=0}$ Nullsetzen und nach x_1 und x_2 auflösen
- direkt aus Schaltung bestimmen: $C \Rightarrow LL$, $L \Rightarrow KS$ (nur sinnfoll wenn Zustandsbeschreibung nicht gebraucht wird)

Zustandsgleichungen normieren: (falls Norm gegeben!) $\frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d}{d\tau}$ mitsubstitiuieren

Gleichgewichtspunkte klassifizieren:

- Jakobimatrix durch Ableiten der Zusatandsgleichungen aufstellen: $J=\left.\begin{bmatrix}\frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2}\\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2}\end{bmatrix}\right|_{GGP,\ x=x(t_\infty)}$
- Gleichgewichtspunkte einzeln in J einsetzen und jeweils Eigenwerte berechnen $det(J-\lambda E)=0$
- Aus den Eigenwerten folgen die Arten der Phasenprotraits
- bei stückweise linearen Kennlinien braucht man J nicht aufzustellen, sondern man unterteilt jeweils in einzelne lineare Systeme
- Satz von Hartmann: Wenn in einem GGP der Realteil aller EW`s der Jacobi-Matrix J undleich Null ist, dann verhält sich das System in der Umgebung des GGP genauso wie ein lineares System mit denselben Eigenwerten (derselben Systemmatix)
- Ist der Realteil auch nur eines einzigen Eigenwerts gleich Null $(\alpha=0)$ kann man keine Aussage über das Stabilitätsverhalten machen. (Außname; Stüchw. Lineare Systeme)
- Bei Stückweise linearen Systemen:
  - Jeden Bereich für sich betrachten und lineare Bereichsdifferentlialgleichungen angeben.
  - Keine Differentiation, Kein Satz von Hartmann nötig!

Phasenportrait zeichen:

- Gleichgewichtspunkte einzeichen und beschriften (Schnittpunkte von $m=0;\ m=\infty$)
- Eigenvektoren einzeichen (vor allem bei Sattelpunkt und Knoten, bei Strudelpunkt nicht so wichtig)
- Lokale Phasenportraits in der Nähe der Gleichgewichtspunkte einzeichen
- Isoklinen einzeichen: $f_2(x_1,x_2)=0 \Leftrightarrow m=0$
  $f_1(x_1,x_2)=0 \Leftrightarrow m\rightarrow\infty$
  m ist Steigung der Tangente an die Trajektorie im Schnittpunkt der Trajektorie mit der Isokline
- Trajektorien einzeichnen
- Separatrix ist / sind Verlängerung der EV der instabilen Gleichgewichtspunkte (auch gekrümmt)
- Wenn alle Bauelemente der Schaltung ungepolt sind, ist das Phasenportrait punktsymmetrisch zum Ursprung.

Konservative Schaltungen (hinreichend genaue Modelle realer Schaltungen sind niemals konservativ!)

Bedingung: für konservative Schaltungen existiert stetige Energiefunktion $E(x)$

- $\dot{E}=0$, $\boxed{\frac{\partial E}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial E}{\partial x_2} f_2 = 0}$
  - Nur Sattel- und Wirbelpunkte sind als Arten von Gelichgewichtspunkten möglich
  - Trajektorien sind Äquipotentiallinien der Energiefunktion $\Gamma =$ Trajektorie

$E(\Gamma)=E(u_C(0), i_L(0))$ $\boxed{E(\Gamma)=\frac{1}{2}(C u_C^2 + L i_L^2)}$ in einem Schwingkreis gespeicherte Feldenergie E

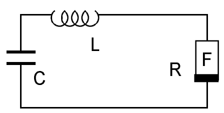
- Scheitelwerte $\hat{u}_c, \hat{i}_L$ erhält man durch Nullsetzen der jeweils anderen Zustandsgröße $\hat{i}_L = \sqrt{\frac{2E(\Gamma)}{L}}$ $\hat{u}_C = \sqrt{\frac{2E(\Gamma)}{C}}$
- Zeitdauer eines Umlaufs um eine Trajektorie $T_0 = T(\Gamma) = \oint_\Gamma dt = 4 \int_0^{\hat{i}_L} \frac{L}{u_C} di_L = 2\pi\sqrt{LC}$
- Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\frac{\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $u_C = \hat{u}_C \cos(\omega_0 t - \Phi_0)$ Phasenlage aus Anfangszustand!
  $i_L = \hat{i}_L \sin(\omega t - \Phi_0)$
- Ergänzung zum Statz von Hartmann:
  Ein GGP einer nichtlinearen dynamischen Schaltung ist genau dann ein Wirbelpunkt, wenn seine Jacobimatrix rein imaginäre EW`s $(\alpha=0)$ hat und das System in einer offenen Umgebung U des GGP konservativ ist.

Oszilatoren

- Phasenpotrait ist stabiler Grenzzyklus (und damit ein Oszilator) $\Leftrightarrow$
  - Es darf nur einen GGP geben. Dieser muß instabil sein.
  - autonomes, dynamisches System zweiten Grades
  - Trajektorien müssen zu allen Anfangswerten aus Umgebung U beschränkt sein
    (bei letztendlich passiven Elementen immer der Fall !)
  - Zustandsgrößen sind beschränkt (Schaltung nur aus positiven, linearen C, L und R besteht)

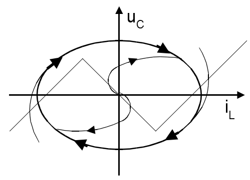
Stabilitätsuntersuchung:
EWs betrachten:
Re < 0 $\Rightarrow$ GGP stabil
Re > 0 $\Rightarrow$ GGP instabil
Re = 0 $\Rightarrow$ keine Aussage

- Stückweise lineare Oszilatoren:



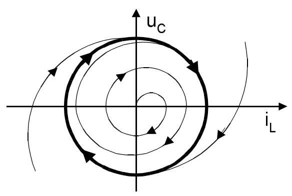
$\dot{u}_C = -\frac{1}{C} i_L$

$\dot{i}_L = -\frac{1}{L} u_C - \frac{1}{L} \cdot r_F(i_L)$



typisches reelles Phasenportrait:
(stückweise linearer Oszi.)

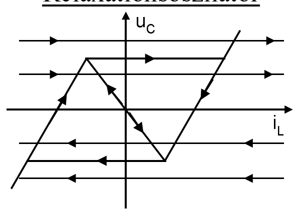
fast harmonischer Oszilator



Frequenz abhängig von den Werten der Reaktanzen.
Amplitude abhängig von Nichtlinearität der Bauteile.
$(L \to \infty, C \to \infty, R \to 0)$

Resonanzfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Relaxationsoszilator



Frequenz und Amplitude werden wesentlich von Nichtlinearität der Bauteile bestimmt.

$(L \to 0, R \to \infty)$ $\omega_0 = \frac{\pi}{\ln 3} \cdot \frac{1}{RC}$ $2\sqrt{\frac{L}{C}} \ll R$

Komplexe Wechselstromrechnung, Analyse dynamischer Schaltungen

Allgemeines:

Eigenschwingung der dynamischen Schaltung: $\boxed{x(t)=Re\left\{A_m e^{\sigma t} e^{t(\alpha+\omega j)}\right\}=A_m e^{\sigma t}\cos(\omega t+\alpha)}$

$p=\sigma+j\omega$ ⇐ Frequenzparameter p

$\omega=2\pi f$ ⇐ Kreisfrequenz ω

$A=A_m e^{j\alpha}$ ⇐ Komplexe Amplitude

$\boxed{I_C=j\omega C U_C}$ $\boxed{U_L=j\omega L I_L}$ bzw. $\boxed{I_L=\frac{1}{j\omega L}\cdot U_L}$ $\boxed{U_C=\frac{1}{j\omega C}\cdot I_C}$

Netzwerkfunktionen:

- Zweipolfunktionen: (Zeiger die am gleichen Tor definiert sind (Immitanzen))

$u(t)=Re\left\{U e^{pt}\right\}$ $i(t)=Re\left\{I e^{pt}\right\}$ mit $p=j\omega$

- Impedanz: komplexer Widerstand, Scheinwiderstand

$\boxed{Z(j\omega)=\frac{U}{I}}$ $\boxed{Z_L(p)=pL}$ $\boxed{Z_C(p)=\frac{1}{pC}}$

- Attmitanz: komplexer Leitwert, Scheinleitwert

$\boxed{Y(j\omega)=\frac{I}{U}}$ $\boxed{Y_L(p)=\frac{1}{pL}}$ $\boxed{Y_C(p)=pC}$

- Transferfunktion: (Übertragungsfunktion, Zeigergrößen gehören zu verschiedenen Toren)

$\boxed{I_q=Y_k(p)U_k}$ ⇒ $\boxed{H(j\omega)=\frac{U_{Out}}{U_{In}}=\frac{U_{Km}}{I_n}=\frac{(-1)^{n+m}\det Y_{nm}(j\omega)}{\det Y_K(j\omega)}}$

$\det Y_{nm}(j\omega)$ ist die Unterdeterminate von Y_K die nach streichen der n-ten Zeile und m-ten Spalte von Y_k entsteht

$\boxed{\text{Cramer Regel: } u_{Ki}=\frac{\det Y_{Ki}}{\det Y_K}}$

$\det Y_{Ki}$ entsteht durch ersetzen der i. Spalte in Y_K durch i_q

Eigenfrequenz bestimmen:

- Transferfunktion faktorisieren (wichtig für Bode)
  - Transferfunktion normieren
  - Nullstellen des Zählerpolynoms ⇒ Nullstellen von $H(p)$
  - Nullstellen des Nennerpolynoms ⇒ Polstellen von $H(p)$
    Eigenfrequenzen $p=\sigma+j\omega$
- Aussage über Phasenportrait:
  Wenn die Nullstellen des Nennerpolynoms in der linken p Halbebene liegen ist das System stabil

Frequenzgang: (Frequenzabhängigkeit von Berag und Winkel (Real und Imaginärteil) der Komplexwertigen Funktionen)

$\boxed{v(\omega)=20\,lg\left|\frac{H(j\omega)}{H(j\omega_0)}\right| \text{ in } dB}$ $v(\omega)=\ln\left|\frac{H(j\omega)}{H(j\omega_0)}\right| \text{ in } Np$

$1\,Np=\frac{20\,dB}{\ln 10}\approx 8{,}69\,dB$

$1\,dB\approx 0{,}115\,Np$

$$\varphi(\omega)=\sphericalangle H(j\omega)=\begin{cases}\arctan\frac{Im\{H(j\omega)\}}{Re\{H(j\omega)\}} & \text{für } Re\{H(j\omega)\}\geq 0\\ \arctan\frac{Im\{H(j\omega)\}}{Re\{H(j\omega)\}}+\pi & \text{für } Re\{H(j\omega)\}<0\end{cases}$$

$lg\,1=0$

$lg\,10=1$

$lg\,1/10=-lg\,10=-1$

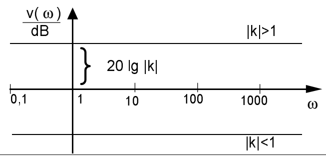
$lg\,100=2$

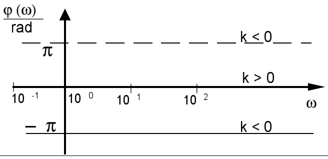
Bode Diagramm

Betrag $v(\omega)$ logarithmisch auftragen — Phase $\varphi(\omega)$ linear auftragen

$H(j\omega)=k=const$

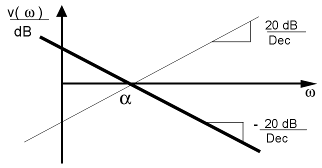
$\Rightarrow \; v(\omega)=20\,lg|k|$

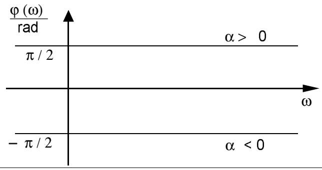




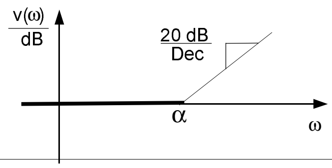
$H(j\omega)=\dfrac{j\omega}{\alpha}$

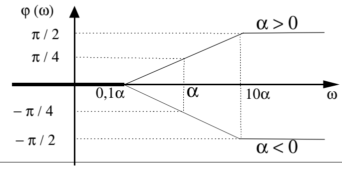
$\boxed{H(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega/\alpha}}$



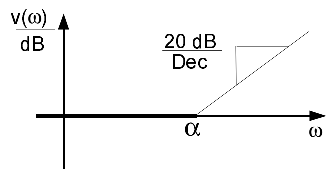


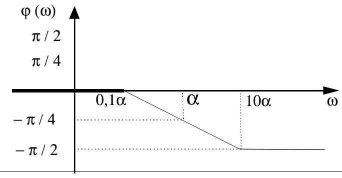
$H(j\omega)=1+\dfrac{j\omega}{\alpha}$



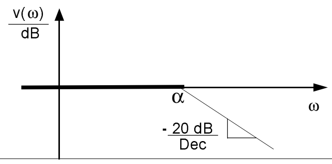


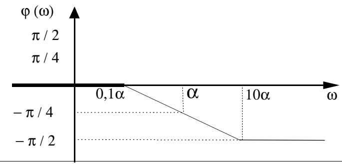
$H(j\omega)=1-\dfrac{j\omega}{\alpha}$





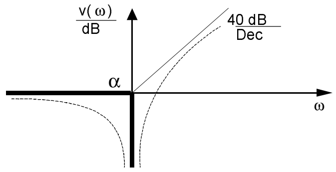
$H(j\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega/\alpha}$

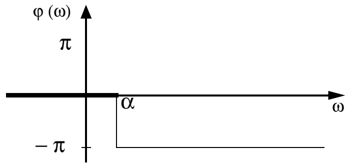




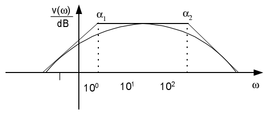
$H(j\omega)=1+\left(\dfrac{j\omega}{\alpha}\right)^2$

40 dB / Dec wegen ..²

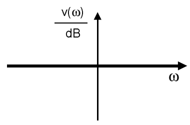




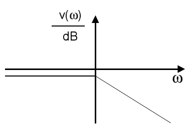
- bei 3dB Eckfrequenzen liegt der Kurvenverlauf um 3dB unter den Asymtoten
- Schnittpunkte der Asymtoten sind Eigenfrequenzen α_1, α_2



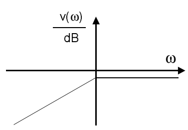
Typische Übertragungsfunktionen



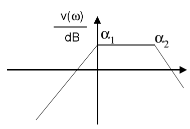
Allpass



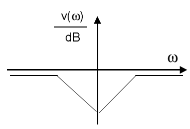
Tiefpass



Hochpass



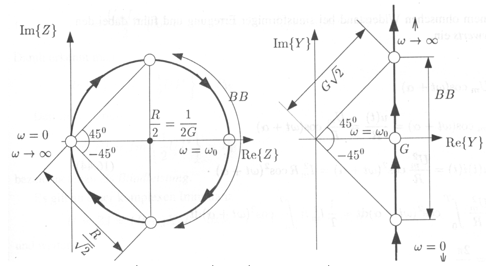
Bandpass



Bandsperre

Ortskurven

- es gibt nur positive Frequenzen;
  man berechnet $Z(j\omega)$ für $\omega=0$ und $\omega\to\infty$
  BB = Bandbreite
  A, B ; 3dB Eckfrequenzen



Aufstellen von Ortskruven:

- wichtige Frequenzen berechnen: $\omega=0$; $\omega\to\infty$; $\omega=\omega_0$; $|Re\{\xi\}|=|Im\{\xi\}|$
- Durchlaufsinn überlegen für $Z=R+j\omega L \uparrow$

  für $Z=R+\dfrac{1}{j\omega L} \downarrow$ Die Orientierung ist die Richtung absteigender Frequenz.
- Komplexer Widerstand Z ist: - in Widerstandsebene : Gerade; - in Leitwertsebene : Kreis
- Leitwert Y ist: - in Widerstandsebene : Kreis; - in Leitwertsebene : Gerade

Komplexe Leistung:

$P=\dfrac{1}{2}U\,I^*=P_W+jP_B$ Wirkleistung: $P_W=\dfrac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\,dt=Re\{P\}$

Leistung hängt nicht von der Frequenz ab!