Grundlagen

Wahrscheinlichkeitsräume

- Ergebnisraum Ω als Menge möglicher Ergebnisse ω_i eines Zufallsgeschehens: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$
- Ereignis A eines Zufallsgeschehens als Teilmenge des Ergebnisraums $A \subset \Omega$
- Ereignis-Algebra $\mathbb{F}$ als Menge von Ereignissen (Teilmengen) des Ergebnisraums

$\mathbb{F} \subseteq P(\Omega)$ **Achtung:** $\mathbb{F} = P(\Omega)$ (Potenzmenge) nur für abzählbare Ω

Minimalanforderungen an eine Ereignis-Algebra:

$$\begin{array}{rcl} \Omega \in \mathbb{F} & & \\ A \in \mathbb{F} & \Rightarrow & A^C \in \mathbb{F} \text{ mit } A^C = \Omega \setminus A \\ A_1, A_2, \dots \in \mathbb{F} & \Rightarrow & \bigcup\limits_{i \geq 1} A_i \in \mathbb{F} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A_i \cap A_j \in \mathbb{F} \\ A_i \setminus A_j \in \mathbb{F} \end{array}$$

Eine Ereignisalgebra welche die Minimalanforderungen erfüllt ist eine σ-Algebra F. Das Paar (Ω, F) heißt dann Ereignisraum bzw. messbarer Raum.

Wenn $\mathbb{F}$ auf der Grundlage einer Menge G erzeugt wird, so wird diese Erzeugendensystem von $\mathbb{F}$ genannt.

Mächtigkeit von $\mathbb{F}: |\mathbb{F}| =$ Anzahl der Teilmengen (A_i) von $\mathbb{F}$ wenn $\mathbb{F} = P(\underbrace{\Omega}_{\text{N Elemente}}) \to |\mathbb{F}| = 2^N$

Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \leq P(A) \leq 1 \text{ für jedes Ereignis A} \\ P(\Omega) = 1 \\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{array}}$$

$$P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) \leq \sum_{i \geq 1} P(A_i) \qquad A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$A \subset B \Rightarrow P(A) < P(B)$$

Rechenregeln

$$\boxed{\begin{array}{l} P(A^C) = 1 - P(A) \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{array}}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit und unabhängige Ereignisse

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Gesetz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(B_i) P(A|B_i)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Für } \textit{unabhängige} \text{ Ereignisse gilt} \\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(B|A) = P(B), \qquad P(A|B) = P(A) \end{array}}$$

Satz von Bayes

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j) P(A|B_j)}{\sum\limits_{i \in I} P(B_i) P(A|B_i)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B) P(A|B)}{P(A)}$$

Kombinatorik

Permutation

Anordnungsmöglichkeiten von n Elementen: $P_n = n!$

Anordnungsmöglichkeiten von n Elementen wobei $k_1, k_2, \dots$ Elemente gleich sind: $P_n^{(k)} = \dfrac{n!}{k_1! k_2! \dots}$

Variation

Auswahl von k Elementen aus einer n-Menge mit Beachtung der Reihenfolge

ohne Wiederholung/Zurücklegen: $V_n^{(k)} = k! \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

mit Wiederholung/Zurücklegen: $V_n^{(k)} = n^k$

Kombination

Auswahl von k Elementen aus einer n-Menge ohne Beachtung der Reihenfolge

ohne Wiederholung/Zurücklegen: $C_n^{(k)} = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! k!}$

mit Wiederholung/Zurücklegen: $C_n^{(k)} = \dbinom{n+k-1}{k}$

Summenformeln

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 2^n - 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a x^k = \frac{a}{1-x} \quad |x| < 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} a x^k = a \frac{1 - x^n}{1 - x} \qquad \sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{2}^y = 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n y^{n-k} = (x+y)^n$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{2}(n-1)n \qquad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} = \frac{1}{e} \qquad \sum_{k=0}^{n} f(n-k) = \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

$$\sum_{k=a}^{n} \sum_{l=b}^{m} f(k,l) \overset{\substack{f(k,l)=0 \\ \text{für } k \neq l}}{=} \sum_{k=\max(a,b)}^{\min(m,n)} f(k,k) \overset{\substack{m<a \\ \text{oder } n<b}}{=} 0$$

Faltung

$$x[n] * h[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] h[n-l] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l] x[n-l]$$

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

Zufallsvariablen

Definition

Dichtefunktion $f_x(x)$	$P(X \in A) = \int_A f_x(x)dx$	$P(X \in A) = \sum_{x \in A} f_x(x)$
Verteilungsfunktion F	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt$	$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f_x(t)$
Erwartungswert $E[X]$ oder μ	$\mu = \int_\Omega x f_x(x)dx$	$\mu = \sum_{x \in \Omega} x \cdot f_x(x)$
Streuung (Varianz) $Var[X]$ oder σ^2	$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_\Omega (x-\mu)^2 f_x(x)dx$	$\sigma^2 = \sum_{x \in \Omega} (x-\mu)^2 f_x(x)$
Standardabweichung	$\sigma = \sqrt{Var[X]}$	

Verteilungsfunktionen

monoton nicht fallend rechtsstetig $F_x(-\infty) = 0$ $F_x(+\infty) = 1$

$$P(a \leq x \leq b) = F_x(b) - F_x(a) = \int_a^b f_x(x)dx \qquad P(x \leq a) = F_x(a) \int_{-\infty}^{a} f_x(x)dx$$

$$P(x > a) = 1 - F(a) = \int_a^\infty f_x(x)dx$$

Erwartungswerte

$$E[aX+b] = aE[X] + b \qquad E[X+Y] = E[X] + E[Y] \qquad E[g(X)] = \underbrace{\sum_{x \in \Omega} g(x) f_X(x)}_{\text{diskrete ZV}} \text{ bzw. } \underbrace{\int_\Omega g(x) f_X(x)dx}_{\text{stetige ZV}}$$

Streuungen

$$Var[aX] = a^2 Var[X] \qquad Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \qquad Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2Cov[X,Y]$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_i a_j Cov(X_i, X_j) \qquad Var[X-Y] = Var[X] + Var[Y] - 2Cov[X,Y]$$

Tschebyschev-Ungleichung

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E[X^2]}{a^2} \qquad P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{Var[X]}{a^2} \qquad P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Momente

k-tes Moment: $m_k = E[X^k]$ k-tes zentrales Moment: $z_k = E[(X - E[X])^k]$

Quantil, Fraktil

Ein α-Quantil ist der Zahlenwert x_α, der die Unlgleichung $P(X < x_\alpha) \leq \alpha$ erfüllt

Das (schwache) Gesetz der großen Zahlen

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad \forall \epsilon > 0 \qquad \overline{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$$

Transformation von ZV

Berechnung von $f_Y(y)$ mit $y = g(x)$

1. $g(x)$ in Bereiche einteilen, wo sich die Definition ändert bzw. wo g(x) ein Extremum besitzt.
2. Für jeden Bereich den Wertebereich für x und für g(x) bestimmen.
3. $y = g(x)$ nach x auflösen ($\Rightarrow x = g^{-1}(x)$) für jeden Bereich (bei mehreren Lösungen gültiges x für jeweiligen Bereich nehmen, s.o.)
4. Berechnung der Ableitung $g'(x)$ für jeden Bereich
5. Aufstellen der Teilfunktionen für $f_Y(y)$
   - $g'(x) = 0$ $\Rightarrow g(x) =$ Waagrechte im Bereich $[x_{w1}, x_{w2}]$ mit y_i als y-Position der Waagrechten

     $$f_Y(y) = P(y = y_i) \cdot \delta(y - y_i) \qquad P(y = y_i) = \int_{x_{w1}}^{x_{w2}} f_X(x)dx$$

   - $g'(x) \neq 0$

     $$f_Y(y) = f_X(x) \frac{1}{|g'(x)|}\bigg|_{x=g^{-1}(y)}$$
6. Für alle Teilbereiche wo der gültige g(x) Bereich gleich ist: Summe bilden.
7. Mithilfe der gefundenen g(x)-Bereiche, die (stückweise definierte) Funktion $f_Y(y)$ aufstellen.

Spezialfälle

Monoton steigende Funktion g(x)

$F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$

Monoton fallende Funktion g(x)

$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$

Lineare Transformation Wenn $g(x) = y = ax + b \Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_x(\frac{y-b}{a})$ $F_Y(y) = F_X(\frac{y-b}{a})$

Zweidimensionale Zufallsvariable

Verteilungsfunktion F_{xy} $\quad F_{xy}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{uv}(u,v)dudv \quad \sum\limits_{u\leq x}\sum\limits_{v\leq y} f_{uv}(u,v)$

Erwartungswerte $E[g(X,Y)]$ $\quad E[g(X,Y)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{xy}(x,y)dxdy \quad \sum\limits_{x}\sum\limits_{y} g(x,y)f_{xy}(x,y)$

Randverteilungen (Marginalisierung)

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dy \qquad f_X(x) = \sum_y f_{xy}(x,y)$$

$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dx \qquad f_Y(y) = \sum_x f_{xy}(x,y)$$

Für *unabhängige* Zufallsvariable X und Y gilt

$f_{xy}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ $\qquad F_{xy}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

$E[XY] = E[X]E[Y]$ $\qquad Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$

$$f_{X+Y}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt = f_X(x) * f_Y(y)$$

Kovarianz $Cov[X,Y]$

$Cov[X,Y] = E[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)] \qquad \mu_1 = E[X],\ \mu_2 = E[Y]$

$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = Cov[Y,X]$

$Cov[X,X] = Var[X],$ $\qquad$ X und Y unabhängig $\Rightarrow$ $Cov[X,Y] = 0$

$Cov[aX,Y] = aCov[X,Y] \qquad Cov[X+Y,Z] = Cov[X,Z] + Cov[Y,Z] \qquad Cov[aX+b, cY+d] = acCov[X,Y]$

$Cov[X,c] = 0$ $\qquad Cov[X,Y] = 0 \Rightarrow$ X und Y unkorreliert $\qquad$ **unkorreliert $\not\Rightarrow$ unabhängig**

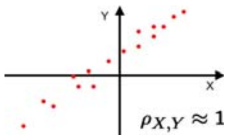
Kovarianzmatrix $Var[\underline{z}]$ $\qquad \underline{z}^T = [y,x]^T$

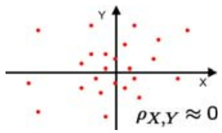
$$Var[\underline{z}] = \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & Cov[Y,X] \\ Cov[X,Y] & \sigma_x^2 \end{bmatrix}$$

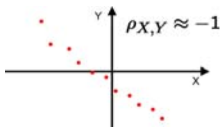
Korrelationskoeffizient ρ

$$\rho = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} \qquad -1 \leq \rho \leq 1$$

$\rho = 1 \Rightarrow$ korreliert $\qquad \rho = 0 \Rightarrow$ unkorreliert $\qquad \rho = -1 \Rightarrow$ antipodisch







$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2\rho\sqrt{Var[X]Var[Y]}$

Bedingte Verteilungen $f(x|y)$ **bzw.** $f(y|x)$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \qquad f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)f(x|y)dy \quad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f(y|x)dy \qquad f_X(x) = \sum_y f_Y(y)f(x|y) \quad f_Y(y) = \sum_x f_X(x)f(y|x)$$

Für unabhängige Zufallsvariable X und Y gilt

$f(y|x) = f_Y(y) \qquad f(x|y) = f_X(x) \qquad f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

Bayes-Regel

$$f(x|y) = \frac{f_X(x)f(y|x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f(y|x)dx} \qquad f(x|y) = \frac{f_X(x)f(y|x)}{\sum\limits_X f_X(x)f(y|x)}$$

Bedingte Erwartungswerte

$$E[X|Y] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)dx \qquad E[Y|X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy$$

$$E[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} E[X|y]f_Y(y)dy \qquad E[Y] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} E[Y|x]f_X(x)dx$$

$$E[X|Y] = \sum_x xf(x|y) \qquad E[Y|X] = \sum_y yf(y|x)$$

$$E[X] = \sum_y E[X|y]f_Y(y) \qquad E[Y] = \sum_x E[Y|x]f_X(x)$$

$E[X] = E[E[X|Y]] \qquad E[Y] = E[E[Y|X]]$

$Var[X] = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]] \qquad Var[Y] = E[Var[Y|X]] + Var[E[Y|X]]$

Lineare Regression

X steht in *linearer Regression* mit Y, wenn $E[X|y]$ eine lineare Funktion von y ist. In diesem Fall gilt:

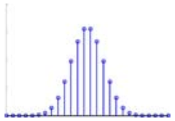
$$\hat{x} = E[X|y] = \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y) \qquad (\textit{Regressionsgerade})$$

Steht Y in linearer Regression mit X, dann gilt

$$\hat{y} = E[Y|x] = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x) \qquad (\textit{Regressionsgerade})$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Diskrete Verteilungsfunktionen




Binomialverteilung $B(n,p)$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n \qquad F(x) = P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$\varphi(s) = (1 - p + ps)^n \qquad \Phi(\mathrm{j}\omega) = (1 - p + pe^{\mathrm{j}\omega})^n$$

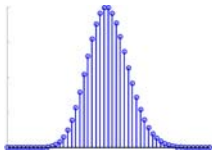
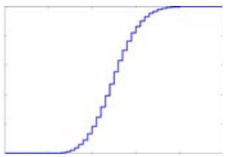
$$\mu = np \qquad \sigma^2 = np(1-p)$$

Geometrische Verteilung $G(p)$

$$f(x) = P(X = x) = (1-p)^x p, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \qquad F(x) = P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} (1-p)^i p$$

$$\varphi(s) = \frac{p}{1 - (1-p)s}$$

$$\mu = \frac{1-p}{p} \qquad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

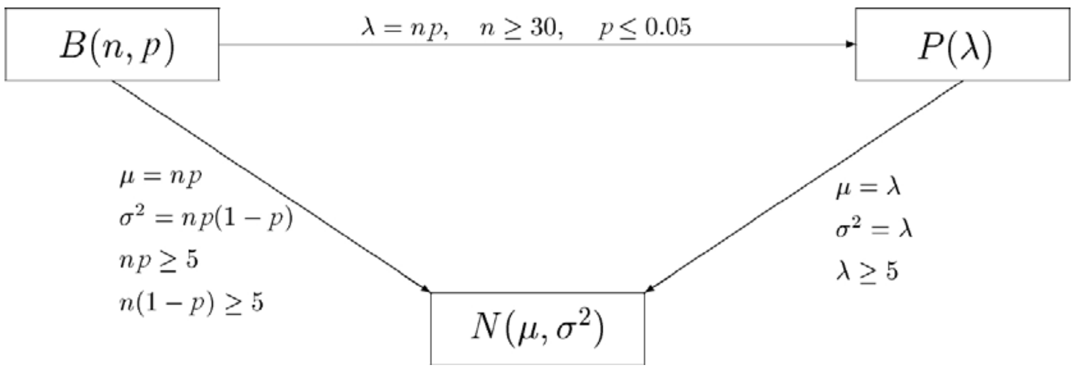
Poisson-Verteilung $P(\lambda)$

entsteht aus Binomialverteilung wenn $p \cdot n = \lambda =$ const. und $n \to \infty$

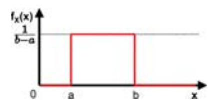
$$P(X = x) = e^{-\lambda}\lambda^x / x! \quad x = 0, 1, 2, \ldots \qquad F(x) = P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} e^{-\lambda}\lambda^i / i!$$

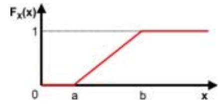
$$\varphi(s) = e^{\lambda(s-1)} \qquad \Phi(\mathrm{j}\omega) = e^{\lambda(e^{\mathrm{j}\omega}-1)}$$

$$\mu = \lambda \qquad \sigma^2 = \lambda$$



Stetige Verteilungsfunktionen



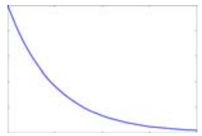
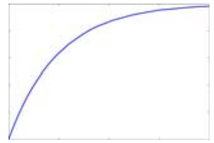


Gleichverteilung $U(a,b)$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \le x \le b \qquad F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{1}{b-a}(x-a) & a \le x \le b \\ 1 & x > a \end{cases}$$

$$\Phi(\mathrm{j}\omega) = \frac{e^{\mathrm{j}b\omega} - e^{\mathrm{j}a\omega}}{\mathrm{j}\omega(b-a)}$$

$$\mu = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

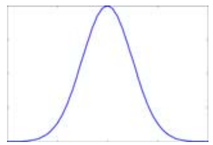
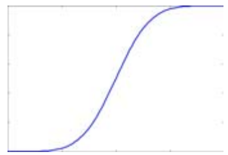



Exponentialverteilung $E(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \ge 0 \qquad F(x) = P(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \ge 0$$

$$\Phi(\mathrm{j}\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{j}\omega}$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Normalverteilung $N(\mu,\sigma)$

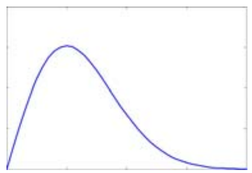
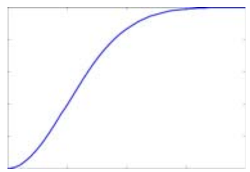
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$\Phi(\mathrm{j}\omega) = e^{\mathrm{j}\mu\omega - \frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$$

$$\mu = \mu \qquad \sigma^2 = \sigma^2$$

$N(0,1)$ heißt auch Standard-Normalverteilung

Rayleigh-Verteilung $R(\sigma)$

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad x \ge 0$$

$$\mu = \sigma\sqrt{\pi/2} \qquad \sigma^2 = 2\sigma^2(1 - \frac{\pi}{4})$$

Zweidimensionale (bivariate) Normalverteilung

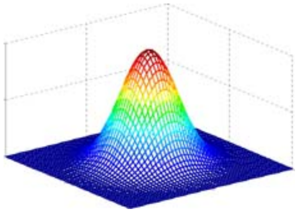
Die zweidimensionale Zufallsvariable (X,Y) ist $N(\mu_x,\mu_y,\sigma_x,\sigma_y,\rho)$-verteilt, wenn sie eine Dichtefunktion folgender Gestalt besitzt:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det(Var[\underline{z}])}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{z}-\underline{\mu})Var[\underline{z}]^{-1}(\underline{z}-\underline{\mu})^T\right]\qquad \underline{z}=[x,y]^T\quad\wedge\quad\underline{\mu}=[\mu_x,\mu_y]^T$$

Die bedingte Verteilung von Y bei gegebenem $X=x$ ist die $N(\mu,\sigma)$-Verteilung mit

$$\mu=\mu_y+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)\quad\text{und}\quad\sigma^2=\sigma_y^2(1-\rho^2)$$



Verteilungsverknüpfungen

Additionstheoreme

X_1	X_2	X_1+X_2
$B(n_1,p)$	$B(n_2,p)$	$B(n_1+n_2,p)$
$P(\lambda_1)$	$P(\lambda_2)$	$P(\lambda_1+\lambda_2)$
$N(\mu_1,\sigma_1)$	$N(\mu_2,\sigma_2)$	$N(\mu_1+\mu_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$

Beziehungen zwischen den Verteilungen

Verteilung von X_1	Verteilung von X_2	Y	Verteilung von Y
$E(\lambda)$	–	λX_1	$E(1)$
$N(0,\sigma)$	$N(0,\sigma)$	$\sqrt{X_1^2+X_2^2}$	$R(\sigma)$
$U(a,b)$	–	$-\frac{1}{\lambda}\ln(X_1)$	$E(\lambda)$

Integraltransformationen von Verteilungen

Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion (nur für ganzzahlige Zufallsvariable)

$\varphi(s)=E[s^X]$ $\qquad E[X]=\varphi'(1)$ $\qquad Var[X]=\varphi''(1)+\varphi'(1)-(\varphi'(1))^2$

$E[X^2]=\varphi''(1)+\varphi'(1)$ $\qquad E[X^3]=\varphi'''(1)+3\varphi''(1)+\varphi'(1)$

$$P_X(X=x)=\frac{1}{x!}\frac{d^x}{ds^x}\varphi_x(s)\bigg|_{s=0}$$

X_1 und X_2 unabhängig: $\varphi_{X_1+X_2}(s)=\varphi_{X_1}(s)\varphi_{X_2}(s)$

Charakteristische Funktion

$\Phi(\omega)=E[e^{j\omega X}]$ $\qquad E[X]=-j\Phi'(0)$ $\qquad Var[X]=-\Phi''(0)+(\Phi'(0))^2$

$$E[X^n]=\frac{1}{j^k}\frac{d^k}{d\omega^k}\Phi(\omega)\bigg|_{\omega=0}$$

X_1 und X_2 unabhängig: $\Phi_{X_1+X_2}(\omega)=\Phi_{X_1}(\omega)\Phi_{X_2}(\omega)$

Fourier-Transformationspaare

Linearität	$au_1(t)+bu_2(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\, aU_1(f)+bU_2(f)$
Ähnlichkeit	$u(kt)\circ\!\!-\!\!\bullet\,\frac{1}{\lvert k\rvert}U(\frac{f}{k})$
Verschiebung	$u(t-t_0)\circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-j2\pi t_0 f}U(f)$
	$e^{j2\pi f_0 t}u(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\, U(f-f_0)$
Differentiation	$\frac{du(t)}{dt}\circ\!\!-\!\!\bullet\, j2\pi fU(f)$
	$-tu(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\,\frac{1}{j2\pi}\frac{dU(f)}{df}$
Integration	$\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau\circ\!\!-\!\!\bullet\, U(f)(\frac{1}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f))$
	$u(t)(-\frac{1}{j2\pi t}+\frac{1}{2}\delta(t))\circ\!\!-\!\!\bullet\int_{-\infty}^{f}U(\phi)d\phi$
Vertauschung	$U^*(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\, u^*(f)$
Gleichanteil	$u(t)=1\circ\!\!-\!\!\bullet\, U(f)=\delta(f)$
Dirac-Impuls	$u(t)=\delta(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\, U(f)=1$
	$u(t)=\delta(t-t_0)\circ\!\!-\!\!\bullet\, U(f)=e^{-j2\pi ft_0}$
Sprung-Impuls	$u(t)=\sigma(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\, U(f)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
Rechteck-Impuls	$u(t)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert<T/2\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\circ\!\!-\!\!\bullet\, U(f)=T\cdot si(\pi Tf)$
Dreieck-Impuls	$u(t)=\begin{cases}-\lvert\frac{d}{a}t\rvert+d & \lvert t\rvert<a\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\circ\!\!-\!\!\bullet\, a\cdot d\cdot si^2(a\pi f)$
Gauß-Impuls	$u(t)=\exp(-\frac{\pi t^2}{(\alpha_G T)^2})\circ\!\!-\!\!\bullet\, U(f)=\alpha_G T\exp(-\pi\alpha_G^2T^2f^2)$
si-Impuls	$2\alpha\beta si(2\pi\beta t)\circ\!\!-\!\!\bullet\, U(f)=\begin{cases}\alpha & \lvert f\rvert<\beta\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$
e-Impuls	$e^{-\alpha t}\quad t>0\circ\!\!-\!\!\bullet\, U(f)=\frac{1}{j2\pi f+\alpha}$
	$e^{-\alpha\lvert t\rvert}\circ\!\!-\!\!\bullet\,\frac{2\alpha}{4\pi^2f^2+\alpha^2}$
Sinusfunktion	$u(t)=\sin(2\pi f_0t)\circ\!\!-\!\!\bullet\, U(f)=\frac{1}{2j}(\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0))$
Cosinusfunktion	$u(t)=\cos(2\pi f_0t)\circ\!\!-\!\!\bullet\, U(f)=\frac{1}{2}(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))$

$$\cos x=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}\qquad\sin x=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}\qquad e^{jx}=\cos x+j\sin x$$

Stochastische Signale

Zufallsfolgen (diskret)

$X[n,\omega] = X(\omega_n)$

Erwartunswertfunktion	$\mu[n] = E[x[n]]$	$= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f_x(\xi;n)d\xi$
Varianzfunktion	$\sigma^2[n] = Var[x[n]]$	$= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 f_x(\xi;n)d\xi$
Autokorrelationsfunktion	$r_x[k,l] = E[x[k]x[l]]$	$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi\eta f_x(\xi,\eta;k,l)d\xi d\eta$
Autokovarianzfunktion	$c_x[k,l] = Cov[x[k],x[l]]$	$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi-\mu_\xi)(\eta-\mu_\eta)f_x(\xi,\eta;k,l)d\xi d\eta$
Kreuzkorrelationsfunktion	$r_{x,y}[k,l] = E[x[k]y[l]]$	$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi\eta f_{xy}(\xi,\eta;k,l)d\xi d\eta$
Kreuzkovarianzfunktion	$c_{x,y}[k,l] = Cov[x[k],y[l]]$	$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi-\mu_\xi)(\eta-\mu_\eta)f_{xy}(\xi,\eta;k,l)d\xi d\eta$

$r_x[k,l] = r_x[l,k]$ $\quad c_x[k,l] = c_x[l,k]$ $\quad c_x[k,k] = Var[x[k]] = \sigma_x^2[k]$

Stationarität

$f_x(\xi_0,\dots,\xi_{n-1};k,k+1,\dots,k+n-1) = f_x(\xi_0,\dots,\xi_{n-1};0,\dots,n-1) \qquad \forall n,k$

Schwach Stationär (WSS, wide sense stationary)

$E[x[n]] = E[x[0]] \quad \forall n$ $\qquad Var[x[n]] = Var[x[0]] \quad \forall n$ $\qquad r_x[k,l] = r_x[k-l] \quad \forall k,l$

Konvergenz

1) sicher konvergent: $X[n,\omega] \overset{n\to\infty}{\to} X(\omega)$
2) fast sicher konvergent: $P(\lim_{n\to\infty} X[n,\omega] = X(\omega)) = 1$
3) konvergent im quadratischen Mittel: $\lim_{n\to\infty} E\{|x[n]-x|^2\} = 0$
4) konvergent in Wahrscheinlichkeit: $\lim_{n\to\infty} P(|x[n]-x|^2 < \epsilon) = 0$
5) konvergent in Verteilung: $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$

aus 3) folgt stets 4) (nicht umgekehrt). $\qquad$ 1) $\to$ 5) : stark $\to$ schwach (im Prinzip)

LTI-Systeme

$y[n,\omega] = A(x[n,\omega])$

$y[n+k] = A(x[n+k]) \quad \forall k$ $\qquad A(\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]) = \alpha_1 A(x_1[n]) + \alpha_2 A(x_2[n])$

$E[Y[n]] = A(E[x[n]]) = h[n] * E[x[n]]$ $\qquad$ (falls A zustandsstabil, d.h. $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < \infty$)

$r_{xy}[m,n] = E[x[m]\cdot y[n]] = A_n(r_x[m,n]) = h[n] * r_x[m,n]$ $\qquad A_n$ heißt A bzgl. $x[n]$ $(A(x[n]))$

$r_y[m,n] = A_m(r_{xy}[m,n]) = A_m(A_n(r_x[m,n])) = h[m] * h[n] * r_x[m,n]$

Spezielle Zufallsfolgen

Gaußsche Zufallsfolge $\quad s[n] = x(\omega_n) + x(\omega_{n+1})$ $\qquad$ mit $x(\omega_i) = N(0,\sigma)$

$\mu_x[i] = 0 \quad \forall i$ $\qquad r_x[k,l] = \sigma^2 \cdot \delta[k-l]$

$\mu_s[n] = E[s[n]] = 0$ $\qquad r_s[k,l] = \sigma^2\delta[k-l-1] + 2\sigma^2\delta[k-l] + \sigma^2\delta[k-l+1]$

Random Walk $\quad s[n] = \sum_{i=0}^{n} x(\omega_i)$ $\qquad$ mit $x : \Omega \to \{-\delta, +\delta\}$ $\qquad P(x[i] = -\delta) = P(x[i] = +\delta) = 0,5$

$P(s[n] = r\cdot\delta) = \binom{n+1}{\frac{r+n+1}{2}} 2^{-(n+1)}$ $\qquad E[s[n]] = 0$ $\qquad Var[s[n]] = (n+1)\delta^2$

Moving Avarage Folge $\quad s[n] = \frac{1}{k+1}\sum_{i=n-k}^{n} x[i]$ $\qquad k > 0$ $\qquad E[s[n]] = \mu \quad Var[x[n]] = \sigma^2$

$E[s[n]] = \mu$ $\qquad c_x[m,n] \overset{m\geq n}{=} \begin{cases} \frac{((n-m)+k+1)\sigma^2}{(k+1)^2} & \text{für } m-k \leq n \\ 0 & \text{für } m-k > n \end{cases}$

Zufallsprozesse (kontinuierlich)

Erwartunswertfunktion	$\mu(t) = E[x(t)]$	$= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f_x(\xi; t) d\xi$
Varianzfunktion	$\sigma^2(t) = Var[x(t)]$	$= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 f_x(\xi; t) d\xi$
Autokorrelationsfunktion	$r_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)]$	$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\eta f_x(\xi, \eta; t_1, t_2) d\xi d\eta$
Autokovarianzfunktion	$c_x(t_1, t_2) = Cov[x(t_1), x(t_2)]$	$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \mu_\xi)(\eta - \mu_\eta) f_x(\xi, \eta; t_1, t_2) d\xi d\eta$
Kreuzkorrelationsfunktion	$r_{x,y}(t_1, t_2) = E[x(t_1)y(t_2)]$	$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi\eta f_{xy}(\xi, \eta; t_1, t_2) d\xi d\eta$
Kreuzkovarianzfunktion	$c_{x,y}(t_1, t_2) = Cov[x(t_1), y(t_2)]$	$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \mu_\xi)(\eta - \mu_\eta) f_{xy}(\xi, \eta; t_1, t_2) d\xi d\eta$

$Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$

unkorreliert $\Rightarrow$ $r_{xy}(t_1, t_2) = \mu_x(t_1)\mu_y(t_2)$ orthogonal $\Rightarrow$ $r_{xy}(t_1, t_2) = 0$

unabhängig $\Rightarrow$ z.B. $F_{xy}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2; t_1, t_2) = F_x(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2) F_y(\eta_1, \eta_2; t_1, t_2)$

Stationarität

$\{X(t_1), \ldots, X(t_n)\}$ und $\{X(t_1 + h), \ldots, X(t_n + h)\}$ besitzen für alle $t_1, \ldots, t_n$ und $h > 0$ dieselbe Verteilungsfunktion.

Schwach Stationär (WSS, wide sense stationary)

$E[x(t)] = E[x(0)] \quad \forall t$ $Var[x(t)] = Var[x(0)] \quad \forall t$ $r_x(t_1, t_2) = r_x(t_1 - t_2) \quad \forall t_1, t_2$

Autokovarianzfunktion $c_x(t_1, t_2) = c_x(t_2 - t_1)$

Autokorrelationsfunktion $r_x(t_1, t_2) = r_x(t_2 - t_1) = E\{X(t_1)X(t_1 + \tau)\} = r_x(\tau)$ mit $\tau = t_2 - t_1$

$r_x(-t) = r_x(t)$ $|r_x(t)| \leq r_x(0)$ $r_x(0) = r_x(t, t) = E\{x(t)x(t)\}$

$P(\{|x(t + \tau) - x(t)| \geq \alpha\}) \leq \frac{2}{\alpha^2}(r_x(0) - r_x(\tau)) \qquad \alpha > 0$

Spektrale Leistungsdichte $S_X(f) = \mathcal{F}\{r_x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} r_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$

$S_X(f) = S_X(-f)$ $S_X(f) \geq 0$ $S_X(f)^* = S_X(f)$

$$r_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = \text{Leistung im Zeitbereich}$$

$x(t) = \alpha u(t) \;\Rightarrow$

$r_x(t) = \alpha^2 r_u(t) \qquad S_X(\omega) = \alpha^2 S_U(\omega)$
$r_{xy}(t) = \alpha r_{uy}(t) \qquad S_{XY}(\omega) = \alpha S_{UY}(\omega)$
$r_{yx}(t) = \alpha r_{yu}(t) \qquad S_{YX}(\omega) = \alpha S_{YU}(\omega)$

$x(t) = u(t) + v(t) \;\Rightarrow$

$r_x(t) = r_u(t) + r_v(t) + r_{uv}(t) + r_{vu}(t)$
$S_X(\omega) = S_U(\omega) + S_V(\omega) + S_{UV}(\omega) + S_{VU}(\omega)$
$r_{xy}(t) = r_{uy}(t) + r_{vy}(t)$
$S_{XY}(\omega) = S_{UY}(\omega) + S_{VY}(\omega)$

LTI-Systeme

$y(t) = A(x(t)) = h(t) * x(t)$

$\mu_y(t) = E[y(t)] = A(\mu_x(t)) = h(t) * \mu_x(t)$

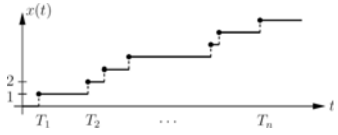
$r_{xy}(t_1, t_2) = A_{t_2}(r_x(t_1, t_2)) = h(t_2) * r_x(t_1, t_2)$

$r_y(t_1, t_2) = h(t_1) * r_{xy}(t_1, t_2) = h_(t_1) * h_(t_2) * r_x(t_1, t_2)$

Falls $x(t)$ WSS:

$S_y(f) = H(f) \cdot S_{xy}(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$

Spezielle Zufallsprozesse



Poisson-Prozess

$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u(t - T_n) \qquad t \geq 0$ $u(t)$: Einheitssprung

T_n : Zeitpunkt des Auftretens des n-ten Ereignisses

$P(x(t) = i) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$ $P(x(t) \leq i) = \sum_{k=0}^{i} P(x(t) = k)$

$P((x(t_2) - x(t_1)) = n) = \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^n}{n!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \qquad t_1 < t_2$

$E[X(t)] = Var[X(t)] = \lambda t$ $r_x(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2) + \lambda^2 t_1 t_2$

Zufalls-Telegraphen-Prozess

$y(t) = (-1)^{x(t)} y_0$ $y_0 \in \{-1, +1\}$ (Anfangszustand) $x(t)$: Poisson-Prozess

$E[y(t)] = E[y_0]e^{-2\lambda t}$ $r_y(t, t + \tau) = e^{-2\lambda\tau}$

Wiener-Prozess

$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha t}} \exp(\frac{-\xi^2}{2\alpha t})$

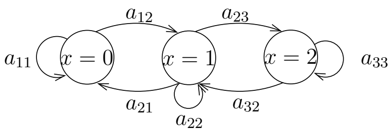
$E[x(t)] = 0$ $c_x(t_1, t_2) = \alpha \min\{t_1, t_2\}$

Markov Prozesse

$f_x(\xi_n|\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots; t_n, t_{n-1}, t_{n-2}, \ldots) = f_x(\xi_n|\xi_{n-1}; t_n, t_{n-1})$ (1-Schritt-Gedächtnis)

Markov-Ketten := Markov-Prozess mit diskretem Zufallsprozess mit diskreten Zufallsvariablen.
Darstellung über Übergangsmatrix A

Beispiel:



$$\begin{bmatrix} P[x_n = 0] \\ P[x_n = 1] \\ P[x_n = 2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P[x_{n-1} = 0] \\ P[x_{n-1} = 1] \\ P[x_{n-1} = 2] \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}_n = \underset{\sim}{A}\underline{P}_{n-1} = \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{A}\underline{P}_{n-2}) = \underset{\sim}{A}^n \underline{P}_0$$

$$\underline{P}_n = \underset{\sim}{A}^n \underline{P}_0 = \underset{\approx}{Q}\underset{\sim}{\Lambda}^n \underset{\approx}{Q}^{-1}\underline{P}_0$$

$$a_{ij} = P(x_n = j-1|x_{n-1} = i-1) < 1$$