

1. Menschliche Sinnesorgane

Auge 87%, Ohr 10%, Rest 3%

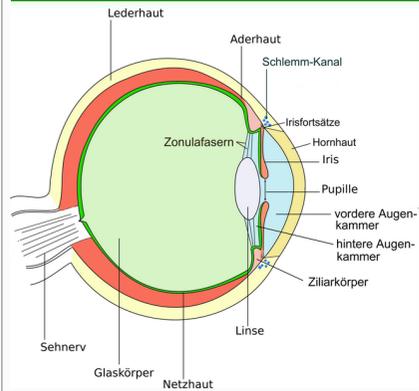
1.1. Sehen

1.1.1. Das Auge

Hornhaut; Pupille; Iris (hell/dunkel Adaption); Ziliarmuskel; Linse (Fokus); Glaskörper; Retina (optisch aktive Elemente, $1 - 2 \cdot 10^8$ Rezeptoren) mit Fovea centralis (höchste Zapfendichte) und blindem Fleck; Sehnerv (10^6 Nervenfasern); Aderhaut; Lederhaut;

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{h}{2l} = \frac{h_z}{x d_{\text{Auge}}} \quad h_z = \sqrt{\frac{l}{D}}$$

$$D_{\text{max}} \approx 1,4 \cdot 10^{11} \text{ m}^{-2} \quad D_{\text{min}} \approx 5 \cdot 10^9 \text{ m}^{-2}$$



Prinzip des Sehens ca. 380-750nm ($4 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \approx 1$ Oktave; $\lambda = \frac{c}{f}$); 100dB; spektr. Empf. je nach Adaption: Tagsehen / photopische Sehen / Farbempfinden bzw. Nachtsehen / scotopische Sehen; Sakkade \Rightarrow fovea centralis;

1.1.2. Psychooptische und physik. Messgrößen

1cd \cong Lichtstärke eines monochromatischen strahles mit $f = 5,4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ und der Strahlungsstärke von $\frac{1}{683} \frac{W}{sr}$.

| Psychooptik | | Physik | |
|--|-----------------------|--------------------------|--------------------------|
| Bezeichnung | Einheit | Bezeichnung | Einheit |
| Lichtstärke I_v | cd (Candela) | Strahl.stärke I | $\frac{W}{sr}$ |
| Leuchtdichte L | $\frac{cd}{m^2}$ | Strahl.dichte L_Ω | $\frac{W}{sr \cdot m^2}$ |
| Lichtstrom Φ_v | lm = cd sr | Strahl.leistung P | W |
| Lichtmenge Q_e | lm · s | Strahl.energie E | J = W s |
| Beleucht.stärke E_v | lx = $\frac{lm}{m^2}$ | Bestrah.stärke E | $\frac{W}{m^2}$ |
| Belichtung H | lx · s | Energiedichte w | $\frac{J}{m^2}$ |
| Lichtausbeute $\mu = \frac{\text{Lichtstrom}}{\text{Strahlungsleistung}} = \frac{lm}{W}$ | | | |

1.1.3. Farbsehen

Stäbchen sw, hohe Konz ($1,2 \cdot 10^8$), Nachtsehen; S-Zapfen Blau 430nm, M-Zapfen Grün 530nm, L-Zapfen Rot 560nm, 1:10:10, insg. $7 \cdot 10^6$;

1.1.4. Gesichtsfeld

volles Farbempfinden nur im Überlappungsbereich der Farbzonen; primäres Gesichtsfeld horiz. $-15^\circ < \theta < +15^\circ$ und vert. $-17^\circ < \phi < +14^\circ$; 3D: $-55^\circ < \theta < 55^\circ$

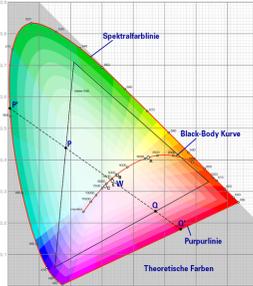
1.2. Farbmischung

Arten der Farbmischung

1. **Additiv** aktive Primärstrahler; RGB;
2. **Subtraktiv** CMY; Absorption best. Prim.farben; Ausgegangen wird von einer weiß beleuchteten Oberfläche;

Farbwürfel Grundfarben, Mischungen, s/w definieren Ecken; $(R, G, B)^T = (1, 1, 1)^T - (C, M, Y)^T$;

1.2.1. CIE



Normfarbtafel nach C.I.E Ziel: Farbeindruck sämtlicher spektraler Farben durch additive Überlagerung dreie monochromatischer Strahler nachzubilden; $\lambda_{R,CIE} = 700nm$, $\lambda_{G,CIE} = 546.1nm$, $\lambda_{B,CIE} = 435.8nm$ sog. Normvalenzen; Im Bereich $350nm < \lambda_R < 540nm$ negativ; \Rightarrow nachzubildende Farbe mit rot überlagert; \Rightarrow es ist nicht möglich, alle wahrnehmbaren Farben mit nur drei Primärstrahlern nachzubilden;

Virtuelle Normvalenzen Uneigentliche Farbmischung; $X(r)$, $Y(g)$, $Z(b)$; exist nicht real durch add. Farbmischung, können aber jede wahrnehmbare Farbe darstellen;

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.49 & 0.31 & 0.2 \\ 0.177 & 0.813 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{CIE} \\ G_{CIE} \\ B_{CIE} \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich $z = 1 - (x + y)$; Die Farbeindrücke durch elmag Wellen best. F, befinden sich auf Begrenzungslinie der Fläche. Im Inneren befinden sich sämtliche Mischfarben, die durch Mischung der x und y Valenzen erzeugen lassen; Weißpunkt im schwerpunkt; Luminanznormierte Normkarte:

$$x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - (x + y)$$

$$x = \frac{X}{X+Y+Z} \quad y = \frac{Y}{X+Y+Z} \quad z = \frac{Z}{X+Y+Z}$$

2. Allgemeines

2.1. 2D-Fouriertransformation

$$G_c(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) e^{-j \cdot (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} dx_1 dx_2$$

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_c(\omega_1, \omega_2) e^{j \cdot (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} d\omega_1 d\omega_2$$

| $g(x_1, x_2)$ | $G_c(\omega_1, \omega_2)$ |
|--|---|
| $g(ax_1, bx_2), (a, b \text{ reel})$ | $\frac{1}{ ab } G_c\left(\frac{\omega_1}{a}, \frac{\omega_2}{b}\right)$ |
| $g(x_1 - a, x_2 - b), (a, b \text{ reel})$ | $e^{-j \cdot (\omega_1 a + \omega_2 b)} G_c(\omega_1, \omega_2)$ |
| $e^{-j \cdot (ax_1 + bx_2)} g(x_1, x_2)$ | $G_c(\omega_1 - a, \omega_2 - b)$ |
| $\frac{\partial^m}{\partial x_1^m} \frac{\partial^n}{\partial x_2^n} g(x_1, x_2)$ | $(j\omega_1)^m (j\omega_2)^n G_c(\omega_1, \omega_2)$ |
| $(-j\omega_1)^m (-j\omega_2)^n g(x_1, x_2)$ | $\frac{\partial^m}{\partial \omega_1^m} \frac{\partial^n}{\partial \omega_2^n} G_c(\omega_1, \omega_2)$ |
| $G_c(x_1, x_2)$ | $(2\pi)^2 g(-\omega_1, -\omega_2)$ |
| $\delta(x_1 - a, x_2 - b) = \delta(x_1 - a)\delta(x_2 - b)$ | $e^{-j \cdot (\omega_1 a + \omega_2 b)}$ |
| $\frac{1}{4\pi \sqrt{ab}} e^{-\frac{x_1^2}{4a} - \frac{x_2^2}{4b}}, (a, b > 0)$ | $e^{-j \cdot (\omega_1^2 a + \omega_2^2 b)}$ |
| $\begin{cases} 1 & \text{für } x_1 < a, x_2 < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ | $4 \frac{\sin(a\omega_1) \sin(b\omega_2)}{\omega_1 \omega_2}$ |
| $\begin{cases} 1 & \text{für } x_1 < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ | $2 \frac{\sin(a\omega_1)}{\omega_1} \delta(\omega_2)$ |

2.2. Farbräume

2.2.1. RGB

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.140 \\ 1 & -0.395 & -0.581 \\ 1 & 2.033 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ U \\ V \end{bmatrix}$$

2.2.2. YUV

Y: Chrominanz (Helligkeit) $U = 0.492 \cdot (B - Y)$
U, V: Luminanz (Farbe) $V = 0.877 \cdot (R - Y)$

Y: Graustufen

Projection p auf UV- Ebene:

Farbsättigung

Winkel α mit U-Achse: Farbton

$$\begin{bmatrix} Y \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.147 & -0.289 & 0.436 \\ 0.615 & -0.515 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

2.2.3. HSV (nicht blau, weiß und schwarz!!!)

H: Farbton (hue)

S: Sättigung (saturation)

V: Farbwert (value)

$$V = \max\{R, G, B\}, S = \begin{cases} 0 & \text{für } V = 0 \\ \frac{V - \min\{R, G, B\}}{V} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$H = \begin{cases} \frac{G-B}{V - \min\{R, G, B\}} & \text{für } V = R, S \neq 0 \\ 2 + \frac{R-B}{V - \min\{R, G, B\}} & \text{für } V = G, S \neq 0 \\ 4 + \frac{R-G}{V - \min\{R, G, B\}} & \text{für } V = B, S \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.3. Klassifikation

| Erkennung | X vorhanden | X nicht vorhanden |
|-----------------|--------------------|--------------------|
| X erkannt | a) richtig positiv | b) falsch positiv |
| X nicht erkannt | c) falsch negativ | d) richtig negativ |

2.4. Hauptachsentransformation / PCA

Zweck: Reduktion der Merkmale durch Verwendung der repräsentativsten Hauptachsen, geringer Rechenaufwand

Berechnung

1. Mittelwert der Punkte: $\bar{a} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M a_i$
2. Mittelwertbefreites Ensemble: $\Psi = [(a_1 - \bar{a}), \dots, (a_M - \bar{a})]$
3. Kovarianzmatrix: $\Phi = \frac{1}{M} \Psi \Psi^T$
4. Eigenwerte: $\det(\Phi - \lambda \cdot I) = 0$
5. Eigenvektoren: $\Phi \cdot u_k = u_k \cdot \lambda_k \Rightarrow (\Phi - \lambda_k \cdot I) u_k = 0$
6. Eigenvektoren normieren \Rightarrow Eigenvektoren sind orthogonal

3. Bildverarbeitung

3.1. Separierbarkeit

Das Signal $g(x_1, x_2)$ lässt sich schreiben als:

$$g(x_1, x_2) = g_1(x_1) \cdot g_2(x_2)$$

Bildfilter möglichst immer separieren, um Laufzeit bzw. Operationen zu sparen.

3.2. Diskrete Signale

3.2.1. Kausalität

kausal, wenn: $g[n_1, n_2] = \begin{cases} \text{beliebig} & \text{für } n_1, n_2 > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Bei Z-Transformation: $|\text{Grad}(\text{Zähler})| \geq |\text{Grad}(\text{Nenner})| \rightarrow$ Infinite Impulse Response(IIR)

$|\text{Grad}(\text{Zähler})| < |\text{Grad}(\text{Nenner})| \rightarrow$ Finite Impulse Response(FIR)

3.2.2. Abtastung

Ideale Abtastung:

$$g[x_1, x_2] = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) \delta[x_1 - l_1 \cdot X_1, x_2 - l_2 \cdot X_2]$$

$$G(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{1}{x_1 x_2} \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} G_c\left(\frac{\Omega_1 - 2\pi l_1}{x_1}, \frac{\Omega_2 - 2\pi l_2}{x_2}\right)$$

Abtastabstände: X_1, X_2

Abtasttheorem: $\frac{\pi}{X_1} \geq \omega_{g,1}$ und $\frac{\pi}{X_2} \geq \omega_{g,2}$

Grenzfrequenz $\omega_{g,i}$: maximal vorkommende Frequenz in Richtung ω_i

3.2.3. Quantisierung

normalerweise lineare Quantisierung mit $N = 2^b$ Stufen. (b: #Bits) fürs menschliche Auge genügen 256 Graustufen

3.2.4. Dynamikbereich

Bereich zwischen dem größten (g_{max}) und kleinsten Grauwert (g_{min})

3.2.5. Speicherbedarf von Grauwertbildern

Bits für Dynamikbereich: $b = [\text{Id}(g_{max} - g_{min} + 1)]$

M: #Zeilen, N: #Spalten

Speicherplatz: $b \cdot M \cdot N$

3.2.6. Z-Transformation

$$G(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} g[n_1, n_2] z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}$$

| $g[n_1, n_2]$ | $G(z_1, z_2)$ |
|----------------------------|---------------------|
| $\delta[n_1, n_2]$ | 1 |
| $\delta[n_1 - a, n_2 - b]$ | $z_1^{-a} z_2^{-b}$ |

Von der Filtermatrix zur Übertragungsfunktion

1. Filtermatrix:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Impulsantwort:
$$g[n_1, n_2] = -\delta[n_1, n_2] + 2\delta[n_1 - 1, n_2 - 1] + 3\delta[n_1 - 2, n_2 - 1] + \delta[n_1, n_2 - 2]$$

3. Übertragungsfunktion:
$$G(z_1, z_2) = -1 + 2z_1^{-1}z_2^{-1} + 3z_1^{-2}z_2^{-1} + z_2^{-2}$$

3.2.7. Diskrete Fouriertransformation (für aperiodische Sequenzen)

$$G[K-1, K-2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} g[n_1, n_2] e^{-j2\pi(\frac{k_1 n_1}{N_1} + \frac{k_2 n_2}{N_2})}$$

$$0 \leq k_1 \leq N_1 - 1$$

$$0 \leq k_2 \leq N_2 - 1$$

sonst 0

3.2.8. Filterstrukturen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}$$

3.3. Faltung

$$s(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1, \tau_2) h(x_1 - \tau_1, x_2 - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$s(x_1, x_2) \stackrel{\mathcal{F}}{\bullet} S(\omega_1, \omega_2) = G(\omega_1, \omega_2) * H(\omega_1, \omega_2)$$

$$g(x_1, x_2) \cdot h(x_1, x_2) \stackrel{\mathcal{F}}{\bullet} \frac{1}{4\pi^2} G(\omega_1, \omega_2) * H(\omega_1, \omega_2)$$

Normalisierte Faltung:
$$s[n_1, n_2] = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} g[m_1, m_2] h[n_1 - m_1, n_2 - m_2]$$

3.4. Bildstörungen

3.4.1. Additive Bildstörung

- weißes, gaußverteiltetes Rauschen: entsteht durch spontane Ladungstrennung oder thermischen Störung bei der Analog/Digitalwandlung
- Impulsrauschen („Salt'n'Pepper“): fehlerhafte Pixel erscheinen als schwarze oder weiße Bildpunkte

3.4.2. Lineare, ortsinvariante Bildstörungen

- Motion Blur: Verwischung durch Bewegung von Objekt oder Sensor
- Focus Blur: Unschärfe durch falsche Fokussierung

3.4.3. SNR

$$b[n_1, n_2] = b_I[n_1, n_2] + n[n_1, n_2]$$

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{n_1=1}^N \sum_{n_2=1}^M (b_I[n_1, n_2])^2}{\sum_{n_1=1}^N \sum_{n_2=1}^M (n[n_1, n_2])^2} \right)$$

Rauschsignal:
$$h_n(n_1, n_2) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{(n_1 - \mu_1)^2 + (n_2 - \mu_2)^2}{2\sigma^2}}$$

3.5. Kantenherhebung

akt. Pixel ist rot und fett

Kantenstärke:
$$b_s[n_1, n_2] = \sqrt{(b_{n_1}[n_1, n_2])^2 + (b_{n_2}[n_1, n_2])^2}$$

Kantenrichtung:
$$b_\theta[n_1, n_2] = \arctan\left(\frac{b_{n_2}[n_1, n_2]}{b_{n_1}[n_1, n_2]}\right)$$

3.5.1. Gradientenfilter in n1-Richtung

Detektion harter Kanten

Pixeldifferenz:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
 separ. Pixeldiff.:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Frei-Chen:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3.5.2. Gradientenfilter in n2-Richtung

Detektion harter Kanten

Pixeldifferenz:
$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
 separ. Pixeldiff.:
$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Frei-Chen:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
 Sobel:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Frei-Chen:
$$\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$$

3.5.3. Laplacefilter

Detektion weicher Kanten

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

3.5.4. Binarisierung

weitere Herausarbeitung der Kanten z.B für anschließende Segmentierung oder Skelettierung

$$b_{Bin}[n_1, n_2] = \begin{cases} 1 & \text{für } b[n_1, n_2] \geq s \\ 0 & \text{für } b[n_1, n_2] < s \end{cases}$$

s ist die Entscheidungsschwelle. Meist ist $s < 50$

Median wird aus auf- oder absteigend geordnetem Werten $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_N\}$ gebildet.

$$\text{Median}(\underline{x}) = \begin{cases} x_{\frac{N+1}{2}} & \text{für } N \text{ ungerade} \\ 0.5 \cdot (x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}) & \text{für } N \text{ gerade} \end{cases}$$

3.6. Bildrestauration /-verbesserung

3.6.1. Rauschkompensation

Mittelwertfilter und Gaußfilter sind lineare Filter.
Tiefpass/Rechteckfunktion \rightarrow langsam abklingendes Spektrum \rightarrow starker Einfluss gestörter Punkte auf umliegende Pixel

Kompensationsfilter

- Mittelwertfilter:
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$
- Gaußfilter (Gaußtiefpass):
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

$$h_{\text{Gauß}}[n_1, n_2] = A \cdot e^{-\frac{n_1^2 + n_2^2}{2\sigma^2}} \sum h_{\text{Gauß}}[n_1, n_2] = 1$$

- Medianfilter: akt. Pixel bekommt den Wert des Medians der Filtermaske zugewiesen

3.6.2. Blurkompensation

Finde raus wie die Störfunktion $H(z_1, z_2)$ aussieht und multipliziere mit $\frac{1}{H(z_1, z_2)}$ \Rightarrow alles roger... total einfach... am besten mit dieser Aufgabe anfangen..... NICHT!!!

3.6.3. Histogrammausgleich

Bestmögliche Ausnutzung des dynamischen Bereichs des Bilds \rightarrow Normalverteilung Transformation existent falls Verteilungsdichtefunktion und Transformationsfunktion kontinuierlich und als analytischer Ausdruck vorhanden.
Vorteil: Kontrastverbesserung
Nachteil: u.u. unnatürliches Bild

kontinuierlich

momentane Verteilung: p_g , angestrebte Verteilung: p_f

Gesucht: $T_f(g) = f$

$$\int_0^f p_f(f_0) df_0 \stackrel{!}{=} \int_0^g p_g(g_0) dg_0$$

bei angestrebter Gleichverteilung: $T_f(g) = f = \int_0^g p_g(g_0) dg_0$

diskret

$$K(g_{norm}) = \lfloor \frac{g_{norm}}{G} \rfloor N - 1 \rfloor + \lfloor \frac{N-1}{G} \rfloor \lfloor \frac{g_{norm}}{G} \rfloor$$

$$T(g) = \begin{cases} \text{argmin}_{0 \leq g_{norm} \leq G-1} |K_b(g) - K_b(g_{norm})| & 0 \leq g_{norm} \leq G-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3.7. Morphologische Operatoren

Anwendung auf Binärbilder mit kleinen Strukturelementen.
Vergleich des aktuellen Pixels und Umgebung mit dem Muster des Strukturelements

3.7.1. Erosion

$$X \ominus m[n_1, n_2] = \{(n_1, n_2) | m[n_1, n_2] \subset X\}$$
 komplettes Muster stimmt mit der Umgebung des akt. Pixels überein
 \Rightarrow akt. Pixel ist 1 (Fläche nimmt ab)

3.7.2. Dilatation

$$X \oplus m[n_1, n_2] = \{(n_1, n_2) | m[n_1, n_2] \cap X \neq \emptyset\}$$
 ein Teil des Musters stimmt mit der Umgebung des akt. Pixels überein
 \Rightarrow akt. Pixel ist 1 (Fläche nimmt zu)

3.7.3. Öffnen

$$X \circ m[n_1, n_2] = (X \ominus m[n_1, n_2]) \oplus m[n_1, n_2]$$
 Erosion, dann Dilatation (Unruhige Teile des Bildes werden entfernt)

3.7.4. Schließen

$$X \bullet m[n_1, n_2] = (X \oplus m[n_1, n_2]) \ominus m[n_1, n_2]$$
 Dilatation, dann Erosion (kleine, getrennt liegende Teile werden zu einem größeren Objekt zusammengefasst)

Als Faltung:
$$b_m[n_1, n_2] = \frac{b_{bin}[n_1, n_2] * m[-n_1, -n_2]}{|m|}$$

$$b_{dil}[n_1, n_2] = \lfloor b_m[n_1, n_2] \rfloor \quad b_{ero}[n_1, n_2] = \lfloor b_m[n_1, n_2] \rfloor$$

4. Gesichtsdetektion

Gesichter werden auf Bildern erkannt.

4.1. Farbbasierte Gesichtsdetektion

Hautfarbensegmentierung: Analyse sehr vieler verschiedener Gesichter typische Farbwerte für Gesichter im HSV-Raum:
 $0 \leq H \leq 36^\circ$ und $0, 1 \leq S \leq 0.57$ und $V: 0 - 255$
 \Rightarrow Binarisierung der Gesichtsbilder
Fazit: eignet sich für genauere Überprüfungen von erkannten Gesichtern aus anderen Verfahren

4.1.1. rg-Chrominanzmodell

$$g_1 = -0.7279 \cdot r^2 + 0.6066 \cdot r + 0.1766$$

$$g_2 = -1.8423 \cdot r^2 + 1.5294 \cdot r + 0.0422$$

$$W_r^2(r, g) = (r - 0.33)^2 + (g - 0.33)^2$$

$$b_{bin, HSV}[n_1, n_2] = \begin{cases} 1 & \text{für } g_1 \leq b_g[n_1, n_2] \leq g_2, \\ & W(b_r[n_1, n_2], b_g[n_1, n_2]) \leq 0.02 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4.2. Multiskalen-basierte Gesichtsdetektion

Skalierte Bilder, um verschiedene Blockgrößen für unterschiedliche Gesichtsgrößen erhalten zu können
Tiefpassfilterung des Bildes
Unterabtastung um den Faktor 2 $\Rightarrow \frac{N}{4}$ neue Bildpunkte
Speicherung: $N_{ges} = \frac{4}{3} \cdot N$ (geomtr. Reihe)

4.3. Viola-Jones

ist formbasiert
hohe Erkennungsrate und geringe Rechenzeit für Detektion
Anwendung auf Hautfarbenbereiche

4.3.1. Merkmale

Allgemeine Form: $m_s \cdot m \times n_s \cdot n$

| Typ | Basis | min. Höhe ($m_s \cdot m$) | min. Breite ($n_s \cdot n$) |
|-----|--|-----------------------------|-------------------------------|
| A | $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ | $1 \cdot m$ | $2 \cdot n$ |
| B | $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ | $2 \cdot m$ | $1 \cdot n$ |
| C | $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ | $1 \cdot m$ | $3 \cdot n$ |
| D | $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | $3 \cdot m$ | $1 \cdot n$ |
| E | $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ | $2 \cdot m$ | $2 \cdot n$ |

max. Skalierung mit Bild $M \times N$:
 $m_{max} = \lfloor \frac{M}{m_s} \rfloor$ und $n_{max} = \lfloor \frac{N}{n_s} \rfloor$

Anzahl d. Translationen in n- und m-Richtung:
 $N_{m,trans} = M - m_s m + 1$ und $N_{n,trans} = N - n_s n + 1$

Anzahl d. Realisierungen N_{ges}

$$N_{ges} = \sum_{n=1}^{n_{max}} \sum_{m=1}^{m_{max}} N_{n,trans} \cdot N_{m,trans} = \sum_{n=1}^{n_{max}} N_{n,trans} \sum_{m=1}^{m_{max}} N_{m,trans} = \frac{n_{max} [2N + 2 - n_s(n_{max} + 1)] \cdot m_{max} [2M + 2 - m_s(m_{max} + 1)]}{4}$$

4.3.2. Integralbild

Integration des Originalbildes (Aufsummierung der Pixelwerte bis zum aktuellen Pixel)

$$b_{int}[n_1, n_2] = \sum_{n'_1=1}^{n_1} \sum_{n'_2=1}^{n_2} b[n_1, n_2]$$

mit $1 \leq n_1 \leq N_1, 1 \leq n_2 \leq N_2$
 ⇒ Einsparungen von Operationen: Bei Rechteckfiltern ⇒ Reduzierung auf 4 Operationen (Verrechnung der Eckwerte)
 ⇒ Unabhängigkeit von der Merkmalskalierung

$$I_a = \sum_A b[n_1, n_2]$$

$$I_b = I_a + \sum_B b[n_1, n_2]$$

$$I_c = I_a + \sum_C b[n_1, n_2]$$

$$I_d = \sum_A b[n_1, n_2] + \sum_B b[n_1, n_2] + \sum_C b[n_1, n_2] + \sum_D b[n_1, n_2]$$

$$\sum_D b[n_1, n_2] = I_d + I_a - (I_c + I_b)$$

Schnelles Aufstellen des Integralbildes

1. Originalbild: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Berechnung d. Spaltensummen: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

3. Berechnung d. Zeilensummen: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

4.3.3. Merkmalselektion

Selektion der geeigneten Merkmale

$$h_j(b[n_1, n_2]) = \begin{cases} 1 & \text{für } p_j \cdot f_j(b[n_1, n_2]) \leq p_j \cdot \Theta_j \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Theta_j = \frac{\text{median}_{1 \leq i \leq N_{pos}} (f_j(b_{neg,i}[n_1, n_2])) + \text{median}_{1 \leq i \leq N_{neg}} (f_j(b_{neg,i}[n_1, n_2]))}{2}$$

$$p_j = \text{sgn}(\Theta_j - \text{median}_{1 \leq i \leq N_{pos}} (f_j(b_{neg,i}[n_1, n_2])))$$

4.3.4. AdaBoost-Algorithmus

Maschinelles Lernen zur Merkmalselektion & optimale Kombination der selektierten Klassifikatoren

Gewichtung schwacher Klassifikatoren, so dass ihre Kombination eine höhere Klassifikationsrate erzielt → zuverlässige Klassifikationen Dedektionsfenster mit variabler Größe

- Änderung der Merkmale
- Skalierung der Gewichte

4.3.5. Kaskadierung

Ziel: hohe Dedektionsrate bei möglichst niedriger Fehlalarmrate. Komplexität der Klassifikatoren nimmt mit steigender Kaskadisierungstiefe zu. Blöcke ohne Gesicht werden verworfen - Blöcke mit Gesicht gelangen eine Ebene tiefer.

5. Gesichtserkennung

Merkmale von bereits erkannten Gesichtern werden weiterverarbeitet

5.1. Gesichtserkennung mit Eigengesichtern

Darstellung von Gesichtsbildern in einem anderen Koordinatensystem durch Hauptachsentransformation

Hauptachsen sind Vektoren die selbst als Gesichtsbilder aufgefusst werden können ⇒ Eigengesichter

starke Reduktion der Dimensionalität möglich
 dann Abstandsklassifikatoren im reduzierten Merkmalsraum

M Gesichtsbilder der Größe $N_1 \times N_2$

Verfahren siehe PCA(Allgemeines)

5.1.1. Bestimmung der Eigengesichter

- Gesichter als $(N - 1 \cdot N_2 \times 1)$ Vektor in Matrix $A = [a_1, \dots, a_m]$
- PCA
- Vektor in neuem Raum: $w = U \cdot (b - \bar{a})$
- Schätzung durch Eigenvektoren: $b = \bar{a} + \sum_{i=1}^T u_i \cdot w_i$
- nur M-1 sinnvolle Eigenvektoren
- Eigenvektoren → Richtung größter Änderung
- Gewichtsgrenzen: $-3\sqrt{\lambda_{s,i}} \leq w_{s,i} \leq 3\sqrt{\lambda_{s,i}}$

5.2. Prokrustes Analyse

Ziel: Möglichst gute Übereinstimmung der zwei Vielecke

$$P = [p_1, \dots, p_N] \cdot Q = [q_1, \dots, q_N]$$

$$M(a_x, a_y) = \begin{bmatrix} a_x & -a_y \\ a_y & a_x \end{bmatrix} = A_{skal} \cdot A_{rot}: \text{Skalierung, Rotation}$$

$$a_x = s \cos \alpha, a_y = s \sin \alpha$$

t: Translation

$$Q(1) = \text{proc}(P, Q)$$

Gewichtungsfaktor c_i (meistens 1)

Minimierung des Quadrates der gewichteten Fehler:

$$E = \sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N c_i [p_i - M(a_x, a_y)[q_i] - t]^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_x} = 0, \frac{\partial E}{\partial a_y} = 0, \frac{\partial E}{\partial t_x} = 0, \frac{\partial E}{\partial t_y} = 0$$

$$\begin{bmatrix} Z & 0 & X_q & Y_q \\ 0 & Z & -Y_q & X_q \\ X_q & -Y_q & N & 0 \\ Y_q & X_q & 0 & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ X_p \\ Y_p \end{bmatrix}$$

$$X_p = \sum_{i=1}^N c_i \cdot p_{x,i}$$

$$Y_p = \sum_{i=1}^N c_i \cdot p_{y,i}$$

$$X_q = \sum_{i=1}^N c_i \cdot q_{x,i}$$

$$Y_q = \sum_{i=1}^N c_i \cdot q_{y,i}$$

$$Z = \sum_{i=1}^N c_i \cdot (q_{x,i}^2 + q_{y,i}^2)$$

$$C = \sum_{i=1}^N c_i$$

$$C_1 = \sum_{i=1}^N c_i \cdot (p_{x,i} \cdot q_{x,i} + p_{y,i} \cdot q_{y,i})$$

$$C_2 = \sum_{i=1}^N c_i \cdot (p_{y,i} \cdot q_{x,i} - p_{x,i} \cdot q_{y,i})$$

Poseparameter:

$$a_x = -\frac{X_p \cdot X_q + Y_p \cdot Y_q - N \cdot C_1}{N \cdot Z - X_q^2 - Y_q^2}$$

$$a_y = \frac{X_p \cdot X_q - Y_p \cdot Y_q + C_2}{N \cdot Z - X_q^2 - Y_q^2}$$

$$t_x = \frac{X_p \cdot Z - C_1 \cdot X_q + C_2 \cdot Y_q}{N \cdot Z - X_q^2 - Y_q^2}$$

$$t_y = \frac{Y_p \cdot Z - C_1 \cdot Y_q - C_2 \cdot X_q}{N \cdot Z - X_q^2 - Y_q^2}$$

$$s = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a_x}{s}\right) = \arcsin\left(\frac{a_y}{s}\right)$$

5.2.1. Projektion auf Mittelwertsform

$$\bar{F}_k = \frac{1}{M} \cdot \sum_i i = 1 M F_i^{(k)}$$

$$F_i^{(k)} = \text{proc}(\bar{F}_{k-1}, F_i^{(k-1)})$$

5.3. Delaunay-Kriterium

Erfüllt, wenn sich im Umkreis des Dreiecks $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ kein weiterer Punkt \underline{p}_z befindet. Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.

$$\underline{g} = \underline{s}_a + \lambda \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\underline{b} - \underline{a})$$

$$\underline{s}_a = \underline{a} + 0.5(\underline{b} - \underline{a})$$

$$\underline{h} = \underline{s}_b + \mu \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (\underline{c} - \underline{a})$$

$$\underline{s}_b = \underline{b} + 0.5(\underline{c} - \underline{b})$$

$g = h$ setzen ⇒ 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten μ, λ ⇒ Einsetzen in g oder h ⇒ Umkreismittelpunkt ⇒ Radius bestimmen

5.3.1. Wrapping

Abbildung von Dreiecken einer Textur, so dass sie mit einem korrespondierendem Dreieck der Mittelwertsform übereinstimmen. **Textur Mapping:**

$$x = [p_b - p_a, p_c - p_a] \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + p_a$$

$$x = [p_b - p_a, p_c - p_a] \cdot ([p_b' - p_a', p_c' - p_a']^{-1} \cdot (x' - p_a')) + p_a$$

Bilineare Interpolation:

Gruawert durch vier Nachbarn im Originalbild bestimmt

$$n_1 = [x_1], n_2 = [x_2]$$

$$g'[n_1, n_2] = \xi_1(\xi_2 \cdot g[n_1+1, n_2+1]) + (1 - \xi_2) \cdot g[n_1+1, n_2] + (1 - \xi_1) \cdot \xi_2 \cdot g[n_1, n_2+1] + (1 - \xi_1) \cdot g[n_1, n_2]$$

Mittelwertstextur:

- Wrapping sämtlicher Texturen aus dem Trainingsdatensatz auf die Mittelwertsform
- Gruawertnormierung → Kompensation von störungen

5.4. Kombinaion von Form- und Texturmodell

$$b = \begin{pmatrix} N \cdot w_s \\ w_g \end{pmatrix}$$

$$n_{ii} = \left(\sum_{i=1}^M \lambda_{g,i} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^M \lambda_{s,i} \right)^{-1}$$

$$b = u_c \cdot w_{c,s} \cdot N \cdot U_{c,s}^T \cdot w_c \cdot \bar{g} + U_{c,g}^T \cdot N \cdot U_{c,g}^T \cdot w_c$$

Anpassung der Gewichte: Textur des Originalbilds $g_0(p)$ - Texturschätzung der AAM auf Mittelwerts-Form gewrappt $g_s p$

$$r(p) = g_0(p) - g_s p$$

$$p^{(k)} = p^{(k-1)} - R \cdot (g_0(p^{(k-1)}) - g_s(p^{(k-1)})), 1 \leq k \leq K$$

$$R = \left[\left(\frac{\partial r(p)}{\partial p} \right)^T \cdot \frac{\partial r(p)}{\partial p} \right]^{-1} \cdot \frac{\partial r(p)}{\partial p}$$

6. Objektverfolgung

6.1. Stochastische Objektverfolgung

Wahrscheinlichkeit eines Partikels:

$$k_t = \frac{1}{p(b_t | B_{t-1})}$$

$$p(x_t | B_t) = k_t \cdot p(b_t | x_t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p(b_t | x_{t-1}) \cdot p(x_{t-1} | B_{t-1}) dx_{t-1}$$

$$p(b_t | x_t) \propto e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_t - A \cdot x_{t-1})^T \cdot (x_t - A \cdot x_{t-1})}$$

$$\pi_{i,t} = \frac{p(b_t | x_{i,t})}{\sum_{i=1}^N p(b_t | x_{i,t})}$$

$$\bar{x}_t = \mathcal{E}\{x_{i,t}\} = \sum_{i=1}^N x_{i,t} \cdot \pi_{i,t}$$

7. Mathematik

7.1. Exponentialfunktion und Logarithmus

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \ln x \leq x - 1$$

$$\ln(x^a) = a \ln(x) \quad \ln\left(\frac{x}{a}\right) = \ln x - \ln a \quad \log(1) = 0$$

7.2. Sinus, Cosinus $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

| | | | | | | | | |
|-----------|----|----------------------|----------------------|----------------------|------------------|-------|-------------------|--------|
| x | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\frac{1}{2}\pi$ | π | $1\frac{1}{2}\pi$ | 2π |
| φ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° | 360° |
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | -1 | 0 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | 0 | 1 |
| tan | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | 0 | $\mp\infty$ | 0 |

Additionstheoreme

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x \quad \int x \cos(x) dx = \cos(x) + x \sin(x)$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \quad \int x \sin(x) dx = \sin(x) - x \cos(x)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x))$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad \int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x) \cos(x))$$

$$\sin(x) = \tan(x) \cos(x) \quad \int \cos(x) \sin(x) dx = -\frac{1}{2} \cos^2(x)$$

Stammfunktionen

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \sin x \sin y \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

7.3. Integralarten

Partielle Integration: $\int u v' = u v - \int u' v$

Substitution: $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt$

| $F(x) - C$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|--------------------------------|------------------|-----------------------------------|
| $\frac{1}{q+1} x^{q+1}$ | x^q | $q x^{q-1}$ |
| $\frac{1}{2\sqrt{ax^3}}$ | \sqrt{ax} | $\frac{a}{2\sqrt{ax}}$ |
| $x \ln(ax) - x$ | $\ln(ax)$ | $\frac{a}{x}$ |
| $\frac{1}{a^2} e^{ax}(ax - 1)$ | $x \cdot e^{ax}$ | $e^{ax}(ax + 1)$ |
| $\frac{a^x}{\ln(a)}$ | a^x | $a^x \ln(a)$ |
| $-\cos(x)$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ |
| $\text{Si}(x)$ | $\text{sinc}(x)$ | $\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$ |
| $-\ln \cos(x) $ | $\tan(x)$ | $\frac{1}{\cos^2(x)}$ |

$$\int e^{at} \sin(bt) dt = e^{at} \frac{a \sin(bt) + b \cos(bt)}{a^2 + b^2}$$

$$\int x e^{ax^2} dx = \frac{1}{2a} e^{ax^2} \quad \int t^2 e^{at} dt = \frac{(a-1)^2 + 1}{a^3} e^{at}$$

| | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| 2^1 | 2^2 | 2^3 | 2^4 | 2^5 | 2^6 | 2^7 | 2^8 | 2^{16} |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 65536 |

8. Fouriertransformation

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

Zeitbereich Frequenzspektrum

8.1. Eigenschaften der Fouriertrafo

| | |
|-------------------|--|
| Linearität: | $\alpha x(t) + \beta g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X(f) + \beta G(f)$ |
| Zeitverschiebung: | $x(t - \tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi f\tau} X(f)$ |
| Frequenzversch. | $e^{j2\pi f_0 t} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f - f_0)$ |
| Vertauschung: | $U^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} u^*(f)$ |
| Stauchung | $x(ct) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{ c } X\left(\frac{f}{c}\right)$ |
| Ableitung | $x^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (j2\pi f)^n X(f)$ |
| Integral | $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)\right) X(f)$ |
| Faltung: | $(x * g)(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \cdot G(f)$ |
| Parseval: | $\int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) \cdot u_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(f) \cdot U_2^*(f) df$ |
| Energie: | $E = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) ^2 df$ |

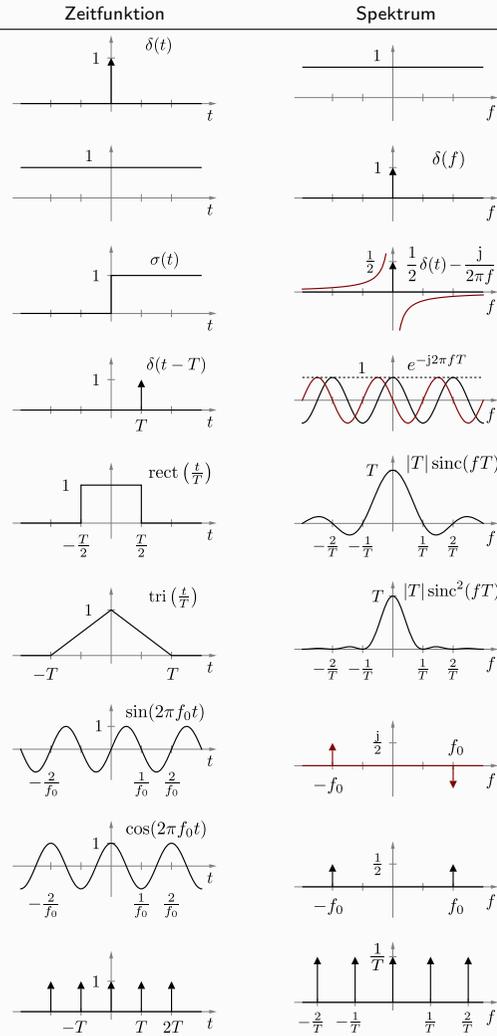
Zusammenhang zwischen geraden und ungeraden Signalanteilen:

$$x(t) = g + u + jg + ju$$

$$X(f) = G + U + jG + jU$$

Bei periodischen Signalen: Fourierreihen!

8.2. Wichtige Fouriertransformationen



8.3. Weitere Paare

| $f(t)$ | $F(\omega)$ | $f(t)$ | $F(\omega)$ |
|---------|---------------------------------|---------------------------------------|------------------------------|
| $ t^n $ | $\frac{2n!}{(i\omega)^{n+1}}$ | $\text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$ | $T \text{rect}(fT)$ |
| t^n | $2\pi i^n \delta^{(n)}(\omega)$ | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$ | $\frac{1}{(a+i\omega)^n}$ |
| | | $\exp(-\alpha t)$ | $\frac{1}{i2\pi f + \alpha}$ |